

考虑加工误差及柔性因素的 RV 减速器 动态传动误差分析方法

魏征, 周建星, 崔权维, 贾吉帅, 张荣华, 刘国春
(新疆大学机械工程学院, 830047, 乌鲁木齐)

摘要: 针对摆线轮、针轮、曲柄轴等关键承载部件的装配误差、制造误差,以及各级齿轮接触弹性变形和支承弹性变形对 RV 减速器传动精度的影响,提出了基于 Newmark- β 法考虑加工和装配误差以及柔性因素的 RV 减速器动态传动误差分析方法。首先,对原始系统动力学模型的动态响应进行时频联合域分析,找出减速器各级振动信号成因,为后续引入装配及制造误差的横向分析提供基础;其次,结合光弹实验,采用有限差分法分析比较了减速器传动误差对各处装配及制造误差的影响灵敏度;然后,量化分析变载、变速和误差条件下各级传动接触及支承弹性变形对动态传动误差的贡献率;最后,结合灵敏度和误差贡献率进行横向比较,确定影响传动精度的主要因素。仿真结果表明:针齿半径误差对传动精度影响最大,其次是曲柄轴凸轮偏心误差,再次是摆线轮的曲柄轴孔偏心误差,最后是针齿壳中心圆半径误差;在变工况传动精度分析中,动态传动误差随负载的增加而增加,输出转速平稳性随负载和转速增加而降低;在柔性变形误差贡献率分析中,低速级齿轮的接触变形贡献率最大,为 51% 以上,支承变形贡献率次之,介于 15%~30% 之间。该研究结果可为 RV 减速器传动误差优化提供一定的参考。

关键词: RV 减速器;光弹实验;制造误差;动态传动误差;横向比较法

中图分类号: TH132.46 **文献标志码:** A

DOI: 10.7652/xjtuxb202302017 **文章编号:** 0253-987X(2023)02-0161-12

A Method to Analyze Dynamic Transmission Error of RV Reducer Considering Machining Error and Flexible Factors

WEI Zheng, ZHOU Jianxing, CUI Weiquan, JIA Jishuai, ZHANG Ronghua, LIU Guochun
(School of Mechanical Engineering, Xinjiang University, Urumqi 830047, China)

Abstract: The assembly and manufacturing errors of cycloidal wheel, needle wheel, crank shaft and other key bearing components, and the contact and support elastic deformation of gears at all levels have impact on the transmission accuracy of RV reducer. To address this problem, a Newmark- β -based method to analyze dynamic transmission error of RV reducer considering machining and assembly errors and flexible factors is proposed. Firstly, the dynamic response of the original system dynamics model is analyzed in the time-frequency joint domain to find out the cause of reducer vibration signals at all levels, thus providing a basis for the subsequent transverse analysis on assembly and manufacturing errors. Secondly, combined with photoelastic experiment, the finite difference method is used to analyze and compare the sensitivity of the reducer's transmission

收稿日期: 2022-07-12。 作者简介: 魏征(1994—),男,硕士生;周建星(通信作者),男,教授。 基金项目: 新疆维吾尔自治区自然科学基金资助项目(2021D01C050);新疆维吾尔自治区重点研发计划资助项目(2021B01003-1)。

网络出版时间: 2022-10-09

网络出版地址: <https://kns.cnki.net/kcms/detail/61.1069.t.20221007.0700.002.html>

errors to the assembly and manufacturing errors. Then, the contribution rate of transmission contact and support elastic deformation to dynamic transmission error under variable load, variable speed and error conditions is quantified. At the end, the main factors affecting transmission accuracy are determined by comparing the sensitivity and error contribution rate. The simulation results show that the needle tooth radius error has the greatest impact on the transmission accuracy, followed by the crank shaft cam eccentricity error, then the crank shaft hole eccentricity error of cycloid wheel, and lastly the needle tooth shell center circle radius error. In the variable-condition transmission accuracy analysis, the dynamic transmission error increases with the increase of load, and the output speed stationarity decreases with the increase of load and speed. In the analysis of flexible deformation error contribution rate, the contact deformation of low-speed gear yields the highest contribution rate of more than 51%, and the support deformation follows, with a contribution rate between 15% and 30%. The research results provide reference for the transmission error optimization of RV reducer.

Keywords: RV reducer; photoelastic experiment; manufacturing error; dynamic transmission error; horizontal comparison method

随着工业 4.0 时代的到来,工业机器人市场有望在 10 年内增长近两倍,而精密减速器的费用约占工业机器人生产材料成本的 25%^[1],影响着工业机器人的重要性能指标。精密减速器中 RV 减速器在生产过程中,由于制造误差和装配误差,会影响其传动精度和运动平稳性,且在复杂的工况条件下,会造成零部件的振动冲击,减少减速器的使用寿命。因此,研究制造及装配误差、变负载和变转速条件对 RV 减速器的传动精度影响,这对高精度复杂齿轮传动的设计与制造具有重要的参考意义。

国内外学者对 RV 减速器传动精度和动态特性有着广泛关注与研究,静态研究层面上, Demenego 等以提升摆线传动机构的传递效率为目标,采用轮齿传动理论优化了摆线轮的齿廓结构^[2-3]。Ren 等通过调整 5 个关键点的位置来设计修形间隙曲线的修形方法,用以提升摆线传动的承载能力和传动精度^[4]。关天民等以优化承载能力为目标,得出了负载摆线齿轮齿廓修形量的优化方案^[5-6]。Li 等通过建立了可控的齿廓修形量与决定传力性能的压力角之间的数学模型,为摆线轮齿廓设计提供了修形方案^[7]。动态研究层面上,韩林山等推导并验证了涵盖各零部件制造及装配误差、齿轮和轴承刚度等因素的非线性动力学方程,并对系统的不确定和非线性因素进行了全局灵敏度分析,得出影响传动精度的主要因素^[8-10]。在此基础上,李兵等采用作用线增量法结合二级传动多齿啮合特性,揭示了各构件间原始误差的传递过程^[11]。Yang 等考虑减速器的过约束结构,采用低副连杆机构建立等效误差模型,

研究了原始误差对模型的影响^[12]。Hu 等提出了一种通过弹性传动误差补偿法对摆线齿轮齿面进行修正,提高 RV 减速器的传动精度^[13]。Lin 等考虑制造和装配公差,采用蒙特卡罗法模拟不同公差等级下 RV 减速器的最大传动误差分布^[14-15]。Chu 等提出一种基于遗传算法的 RV 减速器的选择装配方法,保证了其传动精度^[16]。随后,于东等针对减速器主轴承结构特性,优化了主轴承的拟静力学迭代算法和摩擦力矩的理论求解方式^[17-18]。Xu 等考虑了摆线齿轮副间隙和轴承径向间隙因素,建立一种轴承-摆线针轮传动系统的广义动力学模型,分析了其系统内部传动特性和动态接触响应^[19-20]。

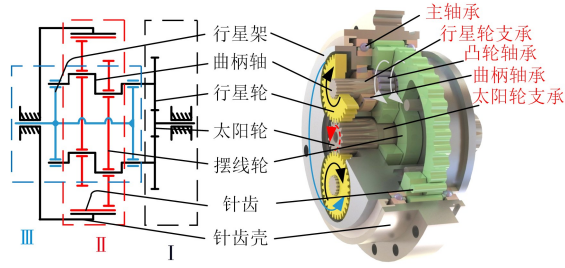
这些研究揭示了减速器动态传动误差的成因并拓展了其维度,但是关于装配与制造误差、接触和支承处弹性变形、变工况条件对减速器传动精度的影响没有横向展开分析。本文建立了计入支承和接触弹性变形、多种误差因素的 RV 减速器动力学模型,综合研究了各处装配与制造误差种类对减速器动载荷和传动误差的影响;讨论了输入变量(负载与输入转速)同输出变量(动载荷、输出转速和传动误差)的关系,分析了引入误差的齿面接触变形、各级齿轮接触变形和支承处弹性变形对传动误差的贡献率,最终确定影响传动精度的主要因素。

1 RV 传动系统动力学模型构建

1.1 RV 减速器系统模型

以 BX40E 减速器为研究对象,传动系统模型如图 1 所示,它是由高速级的渐开线行星齿轮减速机

构 I、低速级的摆线针轮减速机构 II 和输出机构 III 组成。根据减速器实参建模得到相应参数如表 1 所示。



(a) 减速器结构简图 (b) 减速器三维模型

图 1 BX40E 减速器传动系统模型

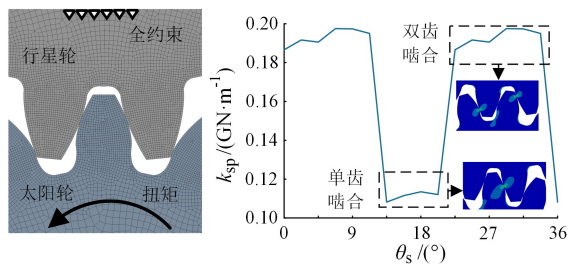
Fig. 1 Transmission system model of BX40E reducer

表 1 BX40E 减速器参数
Table 1 Parameters of BX40E reducer

参数	数值	参数	数值
太阳轮齿宽/mm	9	太阳轮齿数	16
行星轮齿宽/mm	9	行星轮齿数	32
摆线轮齿宽/mm	12.5	摆线轮齿数	39
针齿齿宽/mm	25	针齿齿数	40
模数/mm	1.5	压力角/(°)	20
偏心距/mm	1.3	总传动比	81:1
针齿壳中心圆半径/mm	69.5	针齿半径/mm	3

1.2 RV 减速器的啮合刚度

齿轮副网格模型与啮合刚度如图 2 所示。将渐开线行星齿轮副的一个啮合周期划分为 10 等分,依据轮齿啮合关系,求取各个位置上各轮的转角变化,定义材料为 17CrNiMo6,采用六面体网格划分,太阳轮为目标面,行星轮为接触面,定义摩擦因数为 0.15,接触区域网格细化,共计 1 542 114 个节点,对行星轮内圈节点施加全约束,太阳轮内圈节点施加转矩,采用罚函数法依次计算出各个啮合位置的刚



(a) 齿轮副网格模型 (b) 时变啮合刚度

图 2 齿轮副网格模型与啮合刚度

Fig. 2 Mesh model and meshing stiffness of gear pair

度 $k_{sp}^{[21]}$

$$\theta_2 = z_1 \theta_1 / z_2 \quad (1)$$

$$k_{sp} = F_1 / u = F_1 / (\delta_1 r_{sb}) = T_1 / (r_{sb}^2 \delta_1) \quad (2)$$

式中: θ_1, z_1 分别为太阳轮的转动角度和齿数; θ_2, z_2 分别为行星轮的转动角度和齿数; T_1, δ_1, r_{sb} 分别为太阳轮所承受的扭矩、变形角度和基圆半径; u, F_1 分别为轮齿啮合线方向的等效变形和等效作用力。

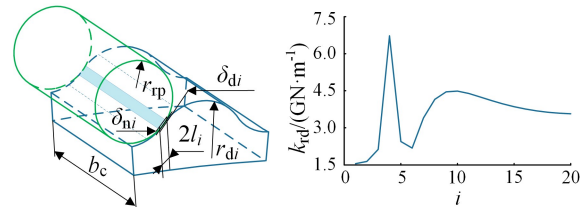
摆线传动啮合模型与啮合刚度如图 3 所示,基于赫兹接触理论建立摆线轮与针齿的接触模型,将针齿与摆线轮的啮合看作是两圆柱相互挤压变形,形成一块宽度为 $2l_i$ 的弹性变形区域。 i 为啮合齿编号,计算第 i 对摆线针齿轮副的啮合刚度 $k_{rdi}^{[22]}$

$$k_{ni} = F_i / \delta_{ni} = \pi b_c E r_{rp} / [4 R_i (1 - \nu^2)] \quad (3)$$

$$k_{di} = F_i / \delta_{di} = \pi b_c E r_{di} / [4 R_i (1 - \nu^2)] \quad (4)$$

$$k_{rdi} = \frac{k_{ni} k_{di}}{k_{ni} + k_{di}} = \frac{\pi b_c E (r_{di} \pm r_{rp})}{4 (1 - \nu^2) (r_{di} + r_{rp})} \quad (5)$$

式中: k_{ni}, k_{di} 分别为单个针齿、摆线轮的刚度; F_i 为第 i 个啮合点所受的力; δ_{ni}, δ_{di} 分别为第 i 个啮合点的针齿和摆线轮的变形; r_{rp}, r_{di} 分别为针齿半径和摆线轮曲率半径; $R_i = r_{rp} r_{di} / (r_{di} \pm r_{rp})$ 为两圆柱体在第 i 个啮合点的综合曲率半径(内啮合取“−”,外啮合取“+”); b_c 为摆线轮齿宽; ν, E 分别为摆线轮、针齿材料(GCr15)的泊松比、弹性模量。



(a) 摆线传动啮合模型 (b) 时变啮合刚度

图 3 摆线传动啮合模型与啮合刚度

Fig. 3 Meshing model and meshing stiffness of cycloid transmission

1.3 系统动力学模型

本文建立了计入零件的装配误差、加工误差、柔性支承和啮合处弹性变形的 RV 传动系统平移-扭转耦合多自由度的动力学分析模型,如图 4 所示。取针轮中心 O 作为全局坐标系中心, X 轴、 Y 轴分别为水平、垂直方向;两摆线轮的编号 $j=1, 2$,摆线轮的局部坐标系是以其理论质心 O_j 为原点,以轴 η_{aj} 为摆线轮的偏心方向,沿其公转方向旋转 90° 得 ξ_{dj} 轴。 $\varphi_i = 2\pi(i-1)/2$ ($i=1, 2$) 为摆线轮(行星架)上的曲柄轴孔的相对位置, $\psi_j = (j-1)\pi$ ($j=1, 2$) 为两摆线轮的理论质心 O_j 的相对位置, a 为偏心距。

θ_s 为输入轴的匀速转角; θ_p 、 θ_{pi} 分别为行星轮的理论、实际自转转角; θ_{dj} 、 θ_{oj} 分别为摆线轮的实际自转角和公转角; θ_c 、 θ_{cw} 分别为行星架的理论、实际转角; z_c 、 z_p 分别为摆线轮、针齿的齿数, k_s 、 k_{pi} 为太阳轮轴、行星轮轴的支承刚度, 由悬臂梁受力时的挠曲变形量来确定; k_{spi} 、 k_{rdjk} 为行星轮-太阳轮、摆线轮-针轮间的啮合刚度; k_{bi} 、 k_{dji} 、 k_w 为行星架-曲柄轴、摆线轮轴孔-曲柄凸轮和行星架-针轮的轴承支承刚度, 其刚度系数采用 Palmgren 公式^[8]来确定, 即

$$k_x = l^{0.8} F^{0.1} / [1.36 (h_1 + h_2)^{0.9}] \quad (6)$$

$$h_i = (1 - \nu_i^2) / \pi E_i \quad i = 1, 2 \quad (7)$$

式中: E_i 、 ν_i 分别为接触材料的弹性模量、泊松比; l 为两弹性体接触线长度; F 为接触弹性体的载荷。

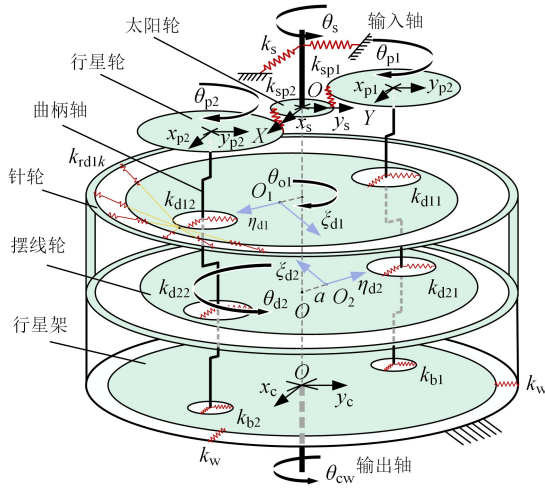


图 4 RV 减速器系统动力学分析模型

Fig. 4 System dynamics analysis model of RV reducer

通过减速器模型中各零部件的受力分析, 并依据牛顿动力学理论, 建立了系统动力学微分方程^[8-9]; 太阳轮支承处的作用力

$$\begin{cases} F_{sx} = k_s (x_s - e_{as} \cos \beta_{as}) \\ F_{sy} = k_s (y_s - e_{as} \sin \beta_{as}) \end{cases} \quad (8)$$

太阳轮与行星轮啮合处的作用力

$$\begin{aligned} F_{spi} = & k_{spi} [(x_s - x_{pi}) \cos \alpha + (y_s - y_{pi}) \sin \alpha - \\ & r_{pb} (\theta_{pi} - \theta_p) + e_{ss} \cos (\theta_s + \beta_{ss} - \alpha) - \\ & e_{spi} \cos (\beta_{spi} - \theta_p - \alpha)] \end{aligned} \quad (9)$$

行星架和针轮支承处的作用力

$$\begin{cases} F_{cax} = k_w (x_c - e_{ac} \cos \beta_{ac}) \\ F_{cay} = k_w (y_c - e_{ac} \sin \beta_{ac}) \end{cases} \quad (10)$$

摆线轮与针齿啮合处的作用力

$$\begin{aligned} F_{dnijk} = & k_{rdjk} [\eta_{dj} \cos \alpha_{jk} - r_d (\theta_{dj} - \theta_c) \sin \alpha_{jk} + \\ & a (\theta_{oj} - \theta_p) \sin \alpha_{jk} - d_{ntjk} - r_{nwjk}] \end{aligned} \quad (11)$$

摆线轮与曲柄轴接触处的作用力

$$\begin{aligned} F_{dkjix} = & k_{dji} [x_{pi} - a \theta_{pi} \sin (\theta_p + \phi_j) - \\ & \eta_{dj} \cos (\theta_p + \phi_j) + r_{sp} (\theta_{dj} - \theta_c) \sin (\theta_c + \varphi_i) + \\ & a \theta_{oj} \sin (\theta_p + \phi_j) - e_{yji} \cos (\theta_c + \varphi_i + \beta_{yji}) + \\ & e_{mji} \cos (\theta_p + \phi_i + \beta_{mji})] \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} F_{dkjiy} = & k_{dji} [y_{pi} - a \theta_{pi} \cos (\theta_p + \phi_j) + \\ & \eta_{dj} \sin (\theta_p + \phi_j) + r_{sp} (\theta_{dj} - \theta_c) \cos (\theta_c + \varphi_i) + \\ & a \theta_{oj} \cos (\theta_p + \phi_j) - e_{yji} \sin (\theta_c + \varphi_i + \beta_{yji}) - \\ & e_{mji} \sin (\theta_p + \phi_i + \beta_{mji})] \end{aligned} \quad (13)$$

行星架与曲柄轴接触处的作用力

$$\begin{aligned} F_{ckix} = & k_{bi} [x_{pi} + r_{sp} (\theta_{cw} - \theta_c) \sin (\theta_c + \varphi_i) - \\ & x_c - e_{cci} \cos (\theta_c + \varphi_i + \beta_{cci})] \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} F_{ckiy} = & k_{bi} [y_{pi} - r_{sp} (\theta_{cw} - \theta_c) \cos (\theta_c + \varphi_i) - \\ & y_c - e_{cci} \sin (\theta_c + \varphi_i + \beta_{cci})] \end{aligned} \quad (15)$$

太阳轮部分、行星齿轮部分、摆线轮部分和行星架部分的动力学微分方程为

$$\begin{cases} m_s \ddot{x}_s + F_{sx} + \sum_{i=1}^2 F_{spi} \cos \alpha = 0 \\ m_s \ddot{y}_s + F_{sy} + \sum_{i=1}^2 F_{spi} \sin \alpha = 0 \end{cases} \quad (16)$$

$$J_s \ddot{\theta}_s - r_{sb} \sum_{i=1}^2 F_{spi} = 0 \quad (17)$$

$$\begin{aligned} m_{pk} [\ddot{x}_{pi} - r_{sp} \omega_c^2 \cos (\theta_c + \varphi_i) - r_{sp} \ddot{\theta}_{cw} \sin (\theta_c + \varphi_i) - \\ 2 \omega_c \dot{y}_{pi}] - F_{spi} \cos \alpha + \sum_{j=1}^2 F_{dkjix} + F_{ckix} = 0 \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} m_{pk} [\ddot{y}_{pi} - r_{sp} \omega_c^2 \sin (\theta_c + \varphi_i) + r_{sp} \ddot{\theta}_{cw} \cos (\theta_c + \varphi_i) + \\ 2 \omega_c \dot{x}_{pi}] - F_{spi} \sin \alpha + \sum_{j=1}^2 F_{dkjiy} + F_{ckiy} = 0 \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} J_{pk} \ddot{\theta}_{pi} - F_{spi} r_{pb} - a \sum_{j=1}^2 [F_{dkjix} \sin (\theta_p + \phi_j) + \\ F_{dkjiy} \cos (\theta_p + \phi_j)] = 0 \quad i = 1, 2 \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} m_d [\ddot{\eta}_{dj} \cos (\theta_p + \phi_j) - a \omega_p^2 \cos (\theta_p + \phi_j) - \\ a \ddot{\theta}_{oj} \sin (\theta_p + \phi_j) - 2 \omega_p \dot{\eta}_{dj} \sin (\theta_p + \phi_j)] - \\ \sum_{i=1}^2 F_{dkjix} + \sum_{k=1}^{z_p} F_{dnijk} \cos (\alpha_{jk} + \theta_p + \phi_j) = 0 \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} m_d [\ddot{\eta}_{dj} \sin (\theta_p + \phi_j) - a \omega_p^2 \sin (\theta_p + \phi_j) + \\ a \ddot{\theta}_{oj} \cos (\theta_p + \phi_j) + 2 \omega_p \dot{\eta}_{dj} \cos (\theta_p + \phi_j)] + \\ \sum_{i=1}^2 F_{dkjiy} + \sum_{k=1}^{z_p} F_{dnijk} \sin (\alpha_{jk} + \theta_p + \phi_j) = 0 \end{aligned} \quad (22)$$

$$J_d \ddot{\theta}_{dj} - \sum_{k=1}^{z_p} F_{dnijk} r_d \sin \alpha_{jk} - r_{sp} \sum_{i=1}^2 [F_{dkjiy} \cos(\theta_c + \varphi_i) - F_{dkjix} \sin(\theta_c + \varphi_i)] = 0 \quad j = 1, 2 \quad (23)$$

$$\begin{cases} m_c \ddot{x}_c - \sum_{i=1}^2 F_{ckix} + F_{cax} = 0 \\ m_c \ddot{y}_c - \sum_{i=1}^2 F_{ckiy} + F_{cay} = 0 \end{cases} \quad (24)$$

$$J_c \ddot{\theta}_{cw} - r_{sp} \sum_{i=1}^2 [F_{ckiy} \cos(\theta_c + \varphi_i) - F_{ckix} \sin(\theta_c + \varphi_i)] = -T_{out} \quad (25)$$

式中: m_s 、 m_{pk} 、 m_d 和 m_c 分别为太阳轮、行星齿轮、摆线轮和行星架的质量; J_{pk} 、 J_d 、 J_c 分别为行星轮轴、摆线轮、行星架的转动惯量; ω_c 、 ω_p 分别为行星架、行星轮的理论角速度; r_{pb} 、 r_d 、 r_{sp} 分别为行星轮的基圆半径、摆线轮的节圆半径、太阳轮和行星轮的中心距; α 、 α_{jk} 分别为高速级齿轮的压力角、第 j 个摆线轮节点与第 k 个针齿中心连线与 η_{dj} 轴正向夹角; (e_{as}, β_{as}) 、 (e_{ac}, β_{ac}) 分别为太阳轮、行星架装配误差; (e_{ss}, β_{ss}) 、 (e_{spi}, β_{spi}) 分别为太阳轮、行星轮的偏心误差; (e_{cci}, β_{cci}) 、 (e_{mji}, β_{mji}) 、 (e_{yji}, β_{yji}) 分别为行星架轴孔、偏心凸轮和摆线轮轴孔的偏心误差大小与方向; d_{ntjk} 、 r_{nwjk} 分别为针齿直径误差、针齿壳中心圆半径误差; T_{out} 负载转矩。

将减速器的动力学微分方程整理为矩阵形式,即

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{X}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{X}} + (\mathbf{K}_b + \mathbf{K}_m)\mathbf{X} = \mathbf{Q} \quad (26)$$

式中: $\mathbf{M}$ 、 $\mathbf{C}$ 分别为减速器系统的质量总装矩阵、阻尼总装矩阵; $\mathbf{K}_m$ 为啮合接触刚度矩阵; $\mathbf{K}_b$ 为支承刚度矩阵; $\mathbf{Q}$ 为广义力向量; $\mathbf{X} = (x_s, y_s, \theta_s, x_{pi}, y_{pi}, \theta_{pi}, \eta_{dj}, \theta_{Oj}, \theta_{dj}, x_c, y_c, \theta_{cw})^T$ 为系统各构件的位移向量。

1.4 原始模型分析

在输入转速为 300 r/min、负载为 400 N·m 的额定工况下,计算了未引入误差的系统动载荷、输出轴转速以及动态传动误差。

在一个啮合周期内,啮合的齿轮发生了进入啮合、脱离啮合等多次冲击过程,会引发轮齿上载荷的变化以及转速的波动,其振动信号中包括啮合频率和其高次倍频等成分^[23],减速器各级传动的啮合频率为^[24]

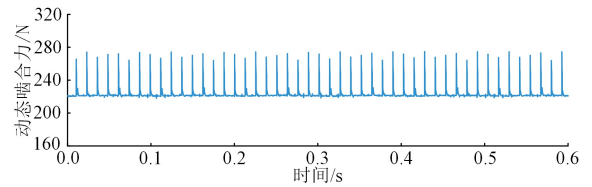
$$f_{m1} = f_{t1} z_2 z_1 z_p / (z_1 + z_2 z_p) \quad (27)$$

$$f_{m2} = f_{t1} z_c z_1 z_p / (z_1 + z_2 z_p) \quad (28)$$

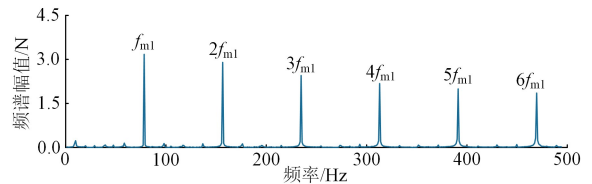
式中: f_{m1} 、 f_{m2} 分别为一级、二级传动的啮合频率; f_{t1} 为太阳轮的转频。

高速级齿轮动态啮合力的时频域图像如图 5 所

示,可知在单双齿交替啮合作用下,该啮合力呈周期性波动,周期为 0.012 7 s,动载荷均值与静载荷相等,为 222.86 N,波动幅值为 29.33 N;太阳轮与行星轮啮合力的主要频率为啮合频率 $f_{m1} = 79$ Hz 及前 6 倍频,啮合频率能量最大。低速级齿轮动态啮合力的时频域图像如图 6 所示,可知在多齿叠加交替啮合作用下,该啮合力呈周期性波动,周期为 0.010 4 s,动载荷均值为 4 056.72 N,波动幅值为 35.04 N;在两级闭式齿轮系固有传动特性的作用下,二级传动处于多齿啮合状态,啮合过渡过程对比一级较为平缓,故在二级传动的动载荷中有一级传动的频率成分,且摆线轮与针齿啮合力的主要频率为啮合频率 $f_{m2} = 96$ Hz 及其前 4 倍频。



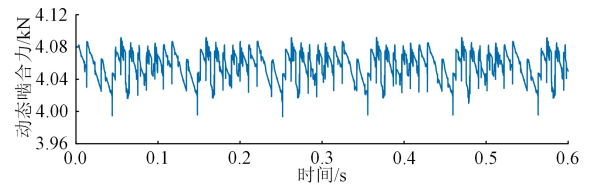
(a) 动态啮合力的时域历程



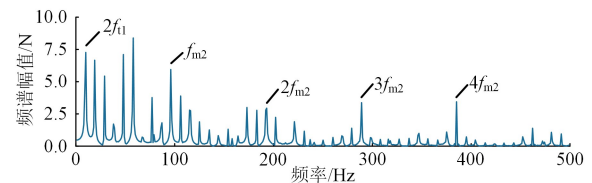
(b) 动态啮合力的频谱示意

图 5 高速级齿轮动态啮合力的时频域图

Fig. 5 Time-frequency domain image of dynamic meshing force of high speed gear



(a) 动态啮合力的时域历程

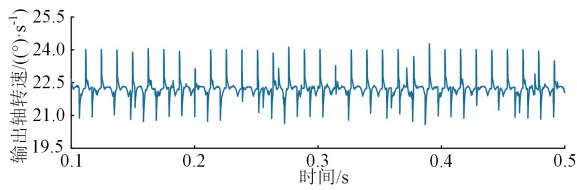


(b) 动态啮合力的频谱示意

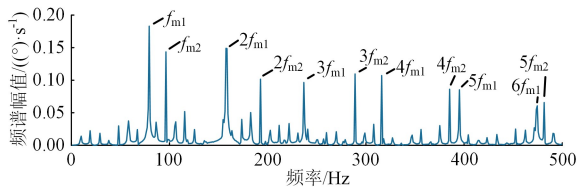
图 6 低速级齿轮动态啮合力的时频域图像

Fig. 6 Time-frequency domain image of dynamic meshing force of low speed gear

输出轴转速的时频域图像如图 7 所示,可知该动态输出转速呈周期性变化,周期为 0.012 6 s,其均值与理论输出转速相等,为 22.22 (°)/s,波动幅值为 1.84 (°)/s;该频域历程中,系统响应分别以高、低速级齿轮的啮合频率 f_{m1} 、 f_{m2} 及其倍频成分为主。动态传动误差图像和频谱示意如图 8 所示,可以看到:动态传动误差呈周期性变化,输出转角 $40^{\circ} \sim 65^{\circ}$,传动误差均值为 39.15",最大值为 40.23",最小值为 38.07",波动幅值为 1.08";该频谱示意中,系统响应以高、低速级齿轮各自的啮合频率 f_{m1} 、 f_{m2} 及其倍频成分为主。



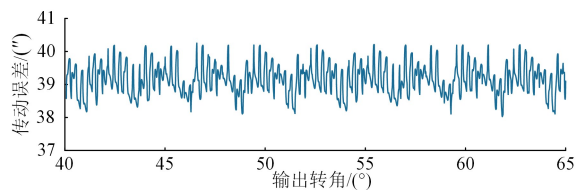
(a)输出轴转速的时域历程



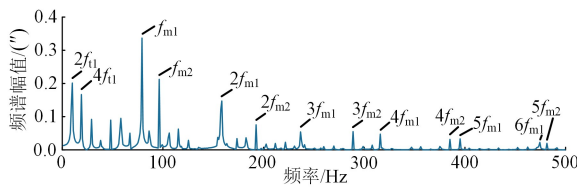
(b)输出轴转速的频谱示意

图 7 输出轴转速的时频域图像

Fig. 7 Time-frequency image of output shaft speed



(a)动态传动误差的图像



(b)动态传动误差的频谱示意

图 8 动态传动误差图像和频谱示意

Fig. 8 Dynamic transmission error image and spectrum diagram

从上述分析得出,计入柔性支承和啮合处弹性变形的减速器动力学模型获得的输出信号与理论计算结果一致,且反映了真实减速器应有的时频域响应特性。

2 制造与装配误差

高速级部分、行星架、针齿壳及针齿的制造误差和装配误差,曲柄轴凸轮的偏心误差,摆线轮的曲柄轴孔偏心误差如表 2~4 所示。表中图示为各误差种类,其通用表达式为 (e, β) , e, β 分别表示误差值和方向。为了便于计算和比较各误差之间对 RV 减速器传动精度的影响,误差值 e 取连续间隔值为 2、4、6 μm 。

表 2 高速级齿轮、行星架、针齿壳和针齿误差

Table 2 Error of high speed gear, planetary frame, needle tooth housing and needle tooth

误差种类	代号	图示	表达式
太阳轮偏心误差	ess		$(e, 0^{\circ})$
行星轮偏心误差	esp		$(0, 0^{\circ}); (e, 0^{\circ})$
太阳轮装配误差	eas		$(e, 0^{\circ})$
行星架轴孔的偏心误差	ecc1		$(e, 180^{\circ}); (e, 0^{\circ})$
	ecc2		$(e, 180^{\circ}); (e, 90^{\circ})$
	ecc3		$(e, 0^{\circ}); (e, 0^{\circ})$
行星架装配误差	eac		$(e, 0^{\circ})$
针齿壳中心圆半径误差	mw		e
针齿半径误差	mt		$-e$

表 3 曲柄轴凸轮的偏心误差

Table 3 Eccentricity error of crank shaft cam

代号	输入侧 $j=1$		输出侧 $j=2$	
	图示	表达式	图示	表达式
em1		$(e, 0^{\circ}); (0, 0^{\circ})$		$(0, 0^{\circ}); (0, 0^{\circ})$
em2		$(e, 0^{\circ}); (0, 0^{\circ})$		$(e, 180^{\circ}); (0, 0^{\circ})$
em3		$(e, 0^{\circ}); (0, 0^{\circ})$		$(e, 0^{\circ}); (0, 0^{\circ})$
em4		$(e, 0^{\circ}); (e, 0^{\circ})$		$(e, 0^{\circ}); (e, 0^{\circ})$
em5		$(e, 0^{\circ}); (e, 0^{\circ})$		$(e, 180^{\circ}); (e, 180^{\circ})$
em6		$(0, 0^{\circ}); (e, 90^{\circ})$		$(0, 0^{\circ}); (0, 0^{\circ})$
em7		$(e, 90^{\circ}); (e, 90^{\circ})$		$(0, 0^{\circ}); (0, 0^{\circ})$
em8		$(e, 270^{\circ}); (e, 90^{\circ})$		$(0, 0^{\circ}); (0, 0^{\circ})$

表 4 摆线轮上曲柄轴孔的偏心误差

Table 4 Eccentricity error of crank shaft hole on cycloid wheel

代号	输入侧 $j=1$		输出侧 $j=2$	
	图示	表达式	图示	表达式
ey1		$(e, 0^{\circ}); (e, 0^{\circ})$		$(0, 0^{\circ}); (0, 0^{\circ})$
ey2		$(e, 0^{\circ}); (0, 180^{\circ})$		$(0, 0^{\circ}); (0, 0^{\circ})$
ey3		$(e, 0^{\circ}); (e, 0^{\circ})$		$(e, 0^{\circ}); (e, 0^{\circ})$
ey4		$(e, 0^{\circ}); (e, 0^{\circ})$		$(e, 180^{\circ}); (e, 180^{\circ})$
ey5		$(e, 270^{\circ}); (0, 0^{\circ})$		$(0, 0^{\circ}); (0, 0^{\circ})$
ey6		$(e, 270^{\circ}); (0, 0^{\circ})$		$(e, 270^{\circ}); (0, 0^{\circ})$
ey7		$(e, 90^{\circ}); (0, 0^{\circ})$		$(e, 270^{\circ}); (0, 0^{\circ})$

3 计算结果及分析

3.1 动态传动误差

动态传动误差大小是衡量减速器传动精度的指标,其值越大,传动精度低,反之越高。传动误差波动幅值用来评价系统的运动平稳性,其值越小,运动平稳性越好,反之越差,动态传动误差 $\theta_e(t)$ 可表示为

$$\theta_e(t) = \theta_{in}(t)/i_z - \theta_{cw}(t) \quad (29)$$

式中: $\theta_{cw}(t)$ 为输出轴的实时实际输出转角, ($^\circ$); $\theta_{in}(t)$ 为实时理论输入转角, ($^\circ$); i_z 为总传动比。

3.2 灵敏度分析方法

灵敏度分析方法是一种判定模型输出信号受输入信号影响程度的分析方法。可根据传动误差对零件的制造及装配误差的变化率,分析对比各误差对系统传动精度的影响规律,从而确定较为敏感的主要影响因素。本文采用有限差分法计算了减速器传动误差对各种误差的影响灵敏度 S_i , 即

$$S_i = \partial E / \partial x_i = [E(x_i + \Delta x_i) - E(x_i)] / \Delta x_i \quad (30)$$

式中: x_i 为各种误差因素; $E(x_i)$ 为各种误差因素影响的动态传动误差; Δx 为误差因素变量中的一个微小变量。

3.3 制造误差和装配误差对传动精度的影响

额定工况条件是:输入转速为 300 r/min, 施加负载为 400 N·m。

3.3.1 高速级、行星架部分误差对传动精度的影响

传动误差对各误差的影响灵敏度如表 5 所示。

表 5 传动误差对各误差的影响灵敏度

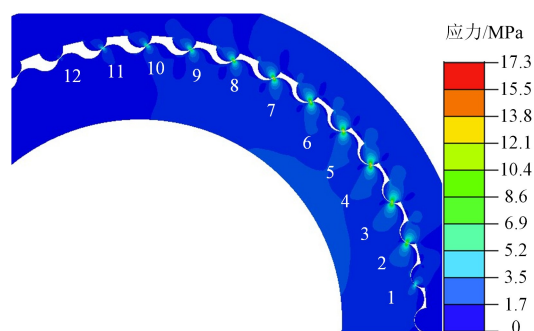
Table 5 Sensitivity of the influence of transmission error on each error ($''$)/ μm

误差种类代号	灵敏度 S	误差种类代号	灵敏度 S
ess	1.66×10^{-5}	em4	0.07
esp	3.27×10^{-3}	em5	1.068
eas	8.45×10^{-7}	em6	0.405
ecc1	0.09	em7	0.135
ecc2	0.075	em8	0.675
ecc3	0.015	ey1	0.027
eac	0.015 4	ey2	0.085
rnw	0.9	ey3	0.015
rnt	1.183	ey4	1.053
em1	0.303	ey5	0.283
em2	0.54	ey6	0.72
em3	0.09	ey7	0.145

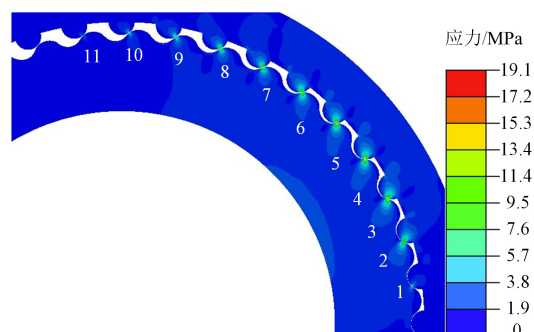
高速级和行星架部分传动误差的灵敏度均不到 $0.1 ('') / \mu\text{m}$, 这是因为高速级的输入转速是输出轴转速的 81 倍, 导致高速级部分的误差(ess、esp、eas)对传动误差影响很小, 而行星架部分误差(ecc1~ecc3、eac)由于两个摆线轮安装方式为互差 180° , 致使其误差相互抵消, 因而其对传动精度的影响很小, 故本文重点研究低速级部分误差对传动精度的影响。

3.3.2 低速级部分误差对传动精度的影响

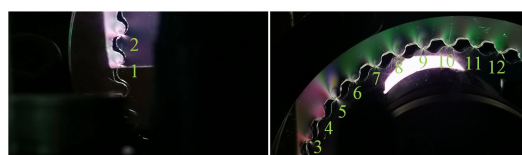
误差值对 rnt、rnw 中的啮合齿对数、针齿变形量的影响如图 9 所示, 为探究 rnt、rnw 对传动误差的影响成因, 根据相似性原理, 设计了摆线轮接触状态光弹实验台, 主要是由聚碳酸酯摆线针轮零件、轮齿夹具、加载摆臂、加载砝码和光弹检测装置组成。为了便于加工和观察轮齿接触特性, 将针齿和针齿壳中心圆的半径误差值为 $2、4、6 \mu\text{m}$ 扩大 10 倍, 施加负载扭矩为 20 N·m, 分别得到仿真、实验条件下摆线轮、针齿的啮合对数变化, 获得了仿真中参与啮合的针齿啮合线方向的最大变形量。



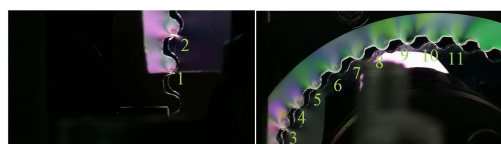
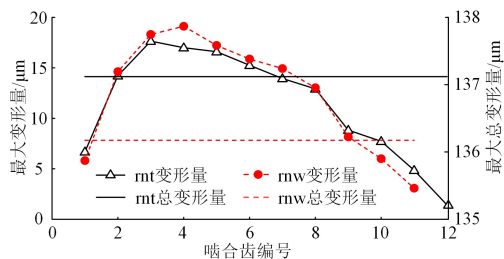
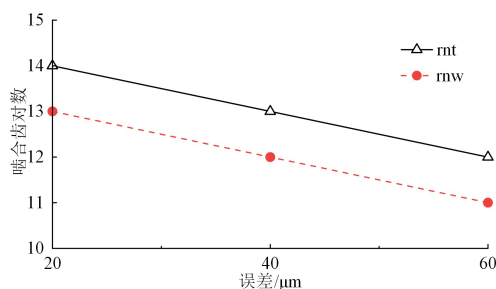
(a) 误差值为 $60 \mu\text{m}$ 的 rnt 仿真的啮合齿对数



(b) 误差值为 $60 \mu\text{m}$ 的 rnw 仿真的啮合齿对数



(c) 误差值为 $60 \mu\text{m}$ 的 rnt 实验啮合齿对数

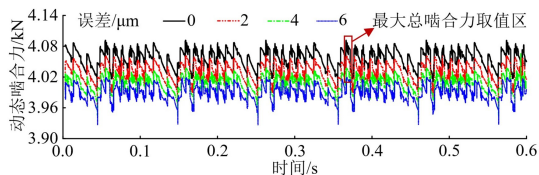
(d) 误差值为 60 μm 的 rnw 实验啮合齿对数(e) 误差值为 60 μm 的 rnt、rnw 针齿变形量仿真

(f) 仿真和实验的啮合齿对数

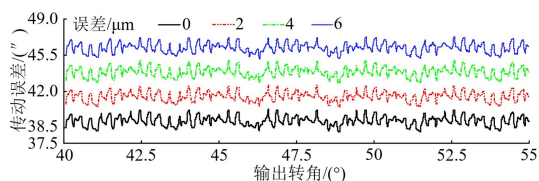
图 9 误差值对 rnt、rnw 中的啮合齿对数、针齿变形量的影响
Fig. 9 Effect of error value on the number of meshing teeth and the deformation of needle teeth in rnt and rnw

由图 9 可知:随着引入 rnt、rnw 的误差值增大,两者中的啮合齿对数减少,rnt 比 rnw 多一对啮合齿对数,其仿真结果与实验结果吻合,仿真结果中 rnt 情况下的针齿啮合线方向的总变形量大于 rnw。

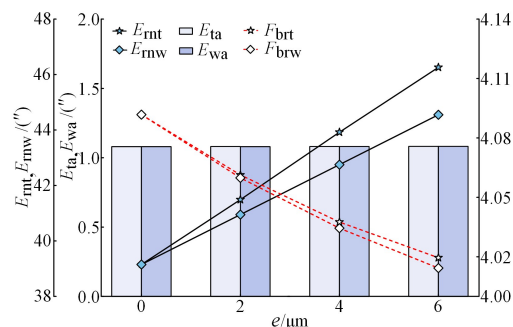
低速级齿轮的最大总啮合力、传动误差及其幅值随低速级部分误差的变化关系如图 10、11 所示。定义最大总啮合力为低速级齿轮在啮合周期中的某一时刻,参与啮合的齿对数共同产生啮合力的最大值。



(a) rnt 的低速级齿轮啮合力



(b) rnt 的传动误差变化



(c) 针齿和针齿壳中心圆半径误差的对比

图 10 rnt、rnw 分别对低速级齿轮啮合力和传动误差的影响
Fig. 10 Influence of rnt and rnw on meshing force and transmission error of low speed gear respectively

由表 2、表 5、图 10 对比可知,随着针齿半径误差(rnt)和针齿壳中心圆半径误差(rnw)各自误差值的增大,其对应的传动误差波动幅值 E_{ta} 和 E_{wa} 基本保持不变,即两者运动平稳性基本持平,但其动态传动误差呈线性增大。rnt 情况下的最大总啮合力 F_{brt} 比 rnw 情况下的最大总啮合力 F_{brw} 略大,且 rnt 情况下传动误差 E_{rnt} 比 rnw 情况下的传动误差 E_{rnw} 略大。

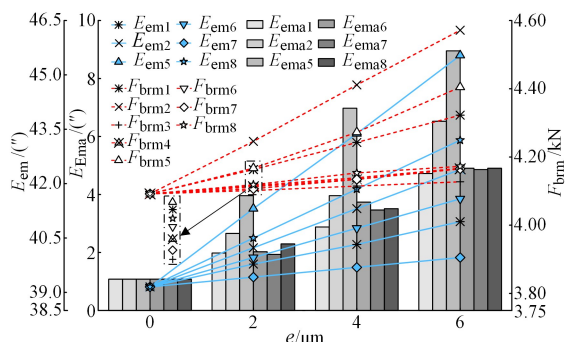
综上所述,分析 rnt、rnw 对系统传动精度的影响,其原因是在一定范围内,随着 rnt、rnw 的误差值增大,会使针齿和摆线轮的啮合间隙增大,低速级齿轮的齿根、齿顶的率先出现脱齿现象,使得啮合齿对数减少,参与啮合齿对数承载增大,导致齿面变形量增加,进而导致传动误差增大。即:最大总啮合力 $F_{brt} > F_{brw}$,使得传动误差 $E_{rnt} > E_{rnw}$,传动误差的灵敏度 $S_{rnt} > S_{rnw}$ 。

由表 3、表 5、图 11(a)可知,随着曲柄轴凸轮的偏心误差的误差值增大,其中,当 em8 情况下最大总啮合力 F_{brm8} 比 em7 情况下 F_{brm7} 大,使得传动误差 E_{em8} 比 E_{em7} 大,传动误差灵敏度 S_{em8} 比 S_{em7} 高,传动误差波动幅值 E_{ema8} 比 E_{ema7} 大。故当两个曲柄轴的同侧偏心凸轮存在方向相反的偏心误差(em8)时,传动误差灵敏度较高,即 em8 对传动精度影响较大,运动平稳性较差,反之,可得 em7 对传动精度影响较小,运动平稳性较好。

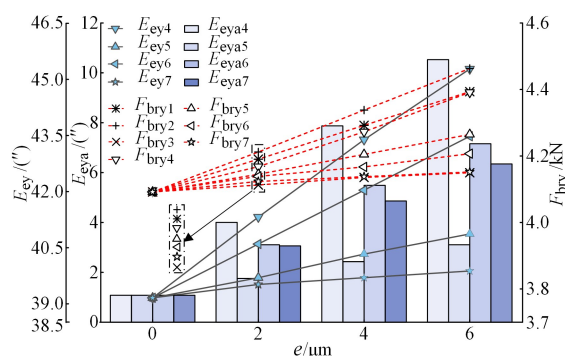
当双曲柄轴输入、输出侧的凸轮偏心误差同相位(em4)时,em4 对传动精度影响较小,运动平稳性较好,反之,em5 对传动精度影响较大,运动平稳性较差;当单曲柄轴异侧的凸轮偏心误差反相位(em2)时,则 em2 对传动精度影响较大,运动平稳性较差,而 em3 情况与之相反;当存在单个凸轮的偏

心误差(em1、em6)时,其对传动精度影响较大,运动平稳性较差。

综上所述,曲柄轴的凸轮偏心误差对传动精度影响较大的误差种类代号由大到小为 em5、em8、em2、em6、em1。



(a) 曲柄轴凸轮的偏心误差



(b) 摆线轮的曲柄轴孔偏心误差

图 11 em、ey 分别对低速级齿轮啮合力和传动误差的影响
Fig. 11 Influence of em and ey on meshing force and transmission error of low speed gear respectively

由表 4、表 5、图 11(b)可知,随着摆线轮上曲柄轴孔的偏心误差值增大,当单侧摆线轮的双曲柄轴孔存在同相位或反相位的偏心误差(ey1、ey2)时,传动误差的灵敏度均不到 $0.1 (^{\circ})/\mu\text{m}$,可知其对传动精度影响很小。

当 ey7 情况下最大总啮合力 F_{bry7} 比 ey6 情况下 F_{bry6} 小,使得传动误差 E_{ey7} 比 E_{ey6} 小,传动误差的灵敏度 S_{ey7} 比 S_{ey6} 低,传动误差波动幅值 E_{eya7} 比 E_{eya6} 小。由此,当单曲柄轴上异侧曲柄轴孔存在反相位的偏心误差(ey7)时,传动误差的灵敏度较小,其波动幅值较小,可知 ey7 对传动精度影响较小,运动平稳性较好,反之,可知 ey6 对传动精度影响较大,运动平稳性较差。

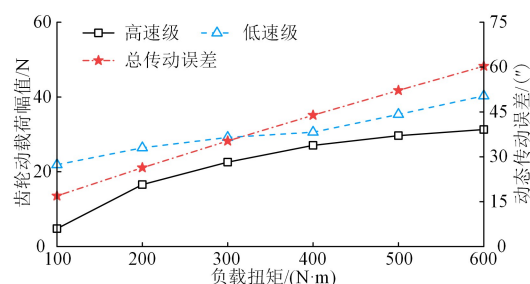
当双侧摆线轮的曲柄轴孔存在反相位的偏心误差(ey4)时,ey4 对传动精度影响较大,运动平稳性

较差,反之,则 ey3 对传动精度影响较小,运动平稳性较好;当摆线轮的单曲柄轴孔存在偏心误差(ey5)时,其对传动精度影响较大,运动平稳性较差。综上所述,摆线轮的曲柄轴孔偏心误差对传动精度影响较大误差种类代号由大到小为 ey4、ey6、ey5。

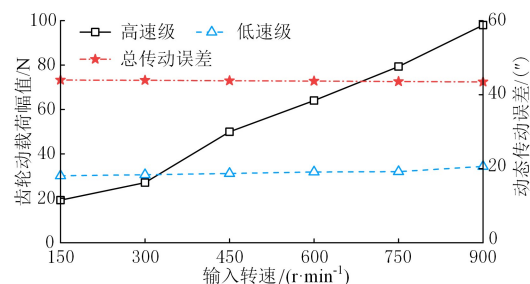
分析 em、ey 对系统传动精度的影响,其原因是在一定程度上,随着曲柄轴凸轮和摆线轮上曲柄轴孔的偏心误差值的增大,在低速级传动中,摆线轮轴孔和曲柄轴凸轮匹配间隙会发生变化,最终导致摆线轮的运动偏心,啮合齿对数发生变化,参与啮合的齿对数出现了承载不均,且承载过大的齿对数,出现总啮合力增大,导致齿面变形量增加,使得传动误差增大。

3.4 变工况和制造误差对传动误差的影响

为探究减速器的负载、转速与传动误差之间的关系,取针齿半径误差 r_{nt} 的误差值为 $4 \mu\text{m}$,将负载和转速作为输入变量,变工况与 r_{nt} 对齿轮动载荷幅值、传动误差的影响如图 12 所示。工况条件 1 如下:输入转速为 300 r/min,负载为 100~600 N·m,工况条件 2 如下:负载为 400 N·m,输入转速为 150~900 r/min。



(a) 变负载



(b) 变转速

图 12 变工况与 r_{nt} 对齿轮动载荷幅值、传动误差的影响
Fig. 12 Influence of variable working condition and r_{nt} on dynamic load amplitude and transmission error of gears

由图 12 可知,随着负载增加,由于高、低级轮齿接触变形和支承变形的整体增加,导致各级齿轮啮合过程的动载荷幅值和传动误差呈增长趋势;随着

转速增加,高、低速级动载荷幅值呈不同程度增长,但传动误差基本保持不变。负载、转速分别对传动误差的影响趋势与文献[25]的实验数据一致。

为进一步探究各级传动的齿面接触变形、支承变形以及引入制造误差的齿面接触变形对减速器的传动误差贡献率随负载和转速变化关系。定义柔性变形误差贡献率, P_1 、 P_2 、 P_3 和 P_4 分别为高速级齿轮接触变形、低速级齿轮接触变形、引入 rnt 齿轮接触变形和柔性支承变形对输出误差的比例,即

$$P_i = \frac{\theta_i}{\theta_e} \times 100\% \quad i = 1, 2, 3, 4 \quad (31)$$

式中: θ_1 、 θ_2 、 θ_3 和 θ_4 分别为高速级齿轮接触、低速级齿轮接触、引入 rnt 齿轮接触和柔性支承变形引起的输出误差转角; θ_e 为总输出误差转角。

负载对传动误差的成分及输出转速幅值的影响如图 13 所示,在工况条件 1 下,支承和接触变形因素对动态传动误差的贡献率及输出转速波动幅值随负载变化关系。

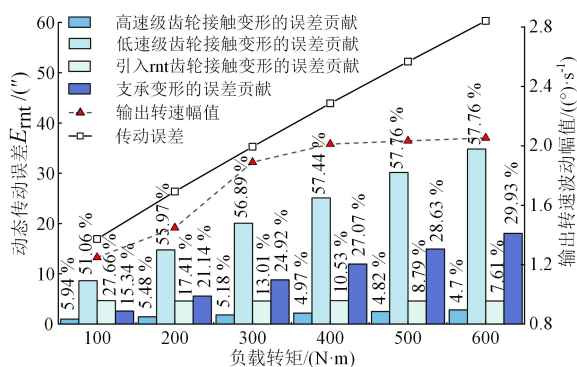


图 13 负载对传动误差的成分及输出转速幅值的影响

Fig. 13 Influence of load on the components of transmission error and output speed amplitude

由图 13 可知,随着负载的增大,动态传动误差和输出转速幅值也增大,则输出转速平稳性也相对降低。在各负载转矩中,由于低速级齿轮啮合过程的动载荷幅值对比高速级较大,同时摆线轮的自转与输出轴同步,致使输出转角误差对该级传动的接触弹性变形更敏感,使其误差贡献率最高,为 51% 以上;柔性支承因素的转角误差贡献率相对较高,为 15%~30% 之间,随着负载的增大,该比例呈现上升趋势;引入 rnt 的轮齿转角误差贡献率为 7%~28% 之间,由于 rnt 的恒定误差引入,导致齿面啮合间隙增大,随着负载的增大,其误差贡献量基本保持不变;因为高速级齿轮的动载荷幅值较小,使得高速级齿轮传动对输出转角误差贡献率较小,不到 6%。

转速对传动误差的成分及输出转速幅值的影响如图 14 所示,在工况条件 2 下,接触和支承变形因素对动态传动误差的贡献率及输出转速幅值随转速变化关系,可以得出:随着转速的增大,由于高速级齿轮啮合过程的动载荷幅值增大,进而导致输出转速幅值不断增加,则输出转速平稳性也相对变差。在不同转速的影响下,各级误差成分贡献量占总误差的比例: P_1 为 5% 左右, P_2 为 57.5% 左右, P_3 为 10.5% 左右, P_4 为 26.7% 左右,各级齿轮啮合处及支承处的弹性变形量变化不大,动态传动误差基本维持在 43.7" 左右,可见转速对减速器的传动精度影响不明显。

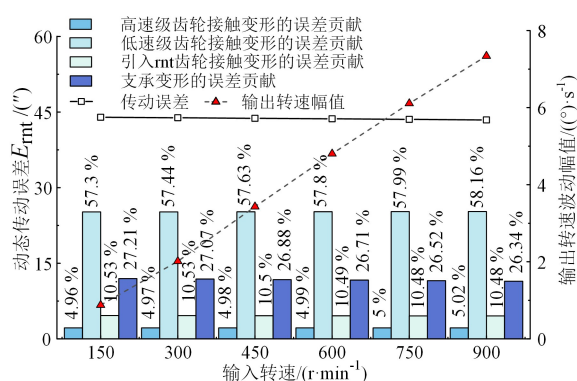


图 14 转速对传动误差的成分及输出转速幅值的影响

Fig. 14 Influence of speed on the components of transmission error and output speed amplitude

4 结 论

本文建立了计入齿轮接触变形、支承柔性变形、加工及装配误差因素的平移-扭转耦合的 RV 减速器动力学模型,并通过灵敏度和误差贡献率分析,由此确定影响传动精度的主要因素,主要结论如下。

(1) 各误差种类对传动误差的影响基本呈线性关系,即其灵敏度近似为一个常量。高速级齿轮和行星架的装配误差、偏心误差对传动精度影响很小,可忽略不计。

(2) 针齿半径误差 (rnt) 对传动精度影响最大,针齿壳中心圆半径误差 (rnw) 次之。曲柄轴的凸轮偏心误差 ($em5$ 、 $em8$ 、 $em2$ 、 $em6$ 、 $em1$) 和摆线轮的曲柄轴孔偏心误差 ($ey4$ 、 $ey6$ 、 $ey5$) 对 RV 减速器的传动精度和运动平稳性影响较大。因而可对这些误差因素在实际生产中予以重视。

(3) 动力学模型在变工况及引入 rnt 条件下输出信号显示:高、低速级齿轮的动载荷幅值和传动误差随负载的增加而增加;输出转速平稳性随负载和

转速增加而降低。

(4)额定工况下,低速级齿轮的接触变形的误差贡献率约为57%,支承变形贡献率约为27%。由此可知,零件的弹性变形会增加RV减速器的动态传动误差,故在控制装配和制造误差前提下,并且满足其他力学性能时,对摆线轮、针齿和滚动轴承可选用刚度较高的材料,以减小零件的弹性变形对RV减速器传动精度的影响。

参考文献:

- [1] PHAM A D, AHN H J. High precision reducers for industrial robots driving 4th Industrial Revolution: state of arts, analysis, design, performance evaluation and perspective [J]. *International Journal of Precision Engineering and Manufacturing: Green Technology*, 2018, 5(4): 519-533.
- [2] DEMENEGO A, VECCHIATO D, LITVIN F L, et al. Design and simulation of meshing of a cycloidal pump [J]. *Mechanism and Machine Theory*, 2002, 37(3): 311-332.
- [3] HWANG Y W, HSIEH C F. Geometric design using hypotrochoid and nonundercutting conditions for an internal cycloidal gear [J]. *Journal of Mechanical Design*, 2007, 129(4): 413-420.
- [4] REN Zhongyi, MAO Shimin, GUO Wenchao, et al. Tooth modification and dynamic performance of the cycloidal drive [J]. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2017, 85: 857-866.
- [5] 关天民, 张东生. 摆线针轮行星传动中反弓齿廓研究及其优化设计 [J]. *机械工程学报*, 2005, 41(1): 151-156.
GUAN Tianmin, ZHANG Dongsheng. Inverse arch-shaped teeth profile and its optimization in a cycloid drive [J]. *Journal of Mechanical Engineering*, 2005, 41(1): 151-156.
- [6] 陆龙生, 张飞翔, 唐恒, 等. 基于优化承载能力的RV减速器摆线齿轮齿廓的等距移距修形 [J]. *中国机械工程*, 2019, 30(17): 2022-2029.
LU Longsheng, ZHANG Feixiang, TANG Heng, et al. Equidistant & radial-moving modifications of cycloidal gear tooth profiles used in RV reducer based on optimized carrying capacity [J]. *China Mechanical Engineering*, 2019, 30(17): 2022-2029.
- [7] LI Tianxing, AN Xiaotao, DENG Xiaozhong, et al. A new tooth profile modification method of cycloidal gears in precision reducers for robots [J]. *Applied Sciences*, 2020, 10(4): 1266.
- [8] 韩林山, 沈允文, 董海军, 等. 2K-V型传动装置动态传动精度理论研究 [J]. *机械工程学报*, 2007, 43(6): 81-86.
HAN Linshan, SHEN Yunwen, DONG Haijun, et al. Theoretical research on dynamic transmission accuracy for 2K-V-type drive [J]. *Journal of Mechanical Engineering*, 2007, 43(6): 81-86.
- [9] 韩林山, 沈允文, 董海军, 等. 基于非线性分析方法的摆线针轮系统传动精度研究 [J]. *中国机械工程*, 2007, 18(9): 1039-1043.
HAN Linshan, SHEN Yunwen, DONG Haijun, et al. Research on the transmission accuracy for cycloid drive based on the nonlinear analysis method [J]. *China Mechanical Engineering*, 2007, 18(9): 1039-1043.
- [10] HAN Linshan, GUO Fei. Global sensitivity analysis of transmission accuracy for RV-type cycloid-pin drive [J]. *Journal of Mechanical Science and Technology*, 2016, 30(3): 1225-1231.
- [11] 李兵, 杜俊伟, 陈磊, 等. 工业机器人RV减速器传动误差分析 [J]. *西安交通大学学报*, 2017, 51(10): 1-6, 46.
LI Bing, DU Junwei, CHEN Lei, et al. Transmission error analysis for industrial robot RV reducer [J]. *Journal of Xi'an Jiaotong University*, 2017, 51(10): 1-6, 46.
- [12] YANG Yuhu, ZHOU Guocheng, CHANG Le, et al. A modelling approach for kinematic equivalent mechanism and rotational transmission error of RV reducer [J]. *Mechanism and Machine Theory*, 2021, 163: 104384.
- [13] HU Yuhao, LI Gang, ZHU Weidong, et al. An elastic transmission error compensation method for rotary vector speed reducers based on error sensitivity analysis [J]. *Applied Sciences*, 2020, 10(2): 481.
- [14] LIN K S, CHAN K Y, LEE J J. Kinematic error analysis and tolerance allocation of cycloidal gear reducers [J]. *Mechanism and Machine Theory*, 2018, 124: 73-91.
- [15] WU Kunyu, SHIH Y P, LEE J J. Kinematic error analysis of the rotor vector gear reducer with machining tolerances [J]. *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, 2020, 42(11): 566.
- [16] CHU Xuyang, XU Huihuang, WU Xiaomin, et al. The method of selective assembly for the RV reducer based on genetic algorithm [J]. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers: Journal of Mechanical Engineering Science*, 2018, 232(6): 921-929.
- [17] 于东, 李小虎, 张进华, 等. RV减速器主轴承拟静力学模型快速计算迭代方法 [J]. *西安交通大学学报*,

- 2016, 50(4): 100-107.
- YU Dong, LI Xiaohu, ZHANG Jinhua, et al. Quasi statics model quick iteration method for RV reducer main bearing [J]. Journal of Xi'an Jiaotong University, 2016, 50(4): 100-107.
- [18] 于东, 张进华, 王东峰, 等. RV减速器主轴承摩擦力矩理论计算及特性分析 [J]. 浙江大学学报(工学版), 2017, 51(10): 1928-1936, 1947.
- YU Dong, ZHANG Jinhua, WANG Dongfeng, et al. Theoretical calculation and analysis on friction torque in RV reducer main bearing [J]. Journal of Zhejiang University (Engineering Science), 2017, 51(10): 1928-1936, 1947.
- [19] XU Lixin, YANG Yuhu. Dynamic modeling and contact analysis of a cycloid-pin gear mechanism with a turning arm cylindrical roller bearing [J]. Mechanism and Machine Theory, 2016, 104: 327-349.
- [20] XU Lixin, CHEN Bingkui, LI Chaoyang. Dynamic modelling and contact analysis of bearing-cycloid-pin-wheel transmission mechanisms used in joint rotate vector reducers [J]. Mechanism and Machine Theory, 2019, 137: 432-458.
- [21] 周建星, 孙文磊, 崔权维. 单级人字齿轮减速器振动噪声影响因素研究 [J]. 振动与冲击, 2015, 34(5): 213-219, 227.
- ZHOU Jianxing, SUN Wenlei, CUI Quanwei. Vibration and noise characteristics of a herringbone gear transmission system [J]. Journal of Vibration and Shock, 2015, 34(5): 213-219, 227.
- [22] 张大卫, 王刚, 黄田, 等. RV减速机动力学建模与结构参数分析 [J]. 机械工程学报, 2001, 37(1): 69-74.
- ZHANG Dawei, WANG Gang, HUANG Tian, et al. Dynamic formulation of RV reducer and analysis of structural parameters [J]. Journal of Mechanical Engineering, 2001, 37(1): 69-74.
- [23] TUMA J. Vehicle gearbox noise and vibration: measurement, signal analysis, signal processing and noise reduction measures [M]. Chichester, West Sussex, UK: John Wiley & Sons Inc., 2014.
- [24] 徐宏海, 王文涛, 刘学翱, 等. RV减速器工作频率理论计算与ADAMS仿真 [J]. 机械传动, 2015, 39(7): 38-41.
- XU Honghai, WANG Wentao, LIU Xueao, et al. Theoretical calculation and ADAMS simulation of RV reducer operating frequency [J]. Journal of Mechanical Transmission, 2015, 39(7): 38-41.
- [25] 王海霞, 吴清锋, 吴艺波, 等. 机器人RV减速器传动误差的测量与分析 [J]. 机械传动, 2020, 44(2): 104-108.
- WANG Haixia, WU Qingfeng, WU Yibo, et al. Measurement and analysis of transmission error of the robot RV reducer [J]. Journal of Mechanical Transmission, 2020, 44(2): 104-108.
- (编辑 赵炜 刘杨)