

# 气泡在水中的之字形与螺旋上升轨迹机理研究

穆志强<sup>1</sup>, 张亚杰<sup>1</sup>, 魏衍举<sup>1</sup>, 杨亚晶<sup>2</sup>, 刘圣华<sup>1</sup>

(1. 西安交通大学能源与动力工程学院, 710049, 西安;

2. 西安交通大学航天航空学院, 710049, 西安)

**摘要:** 为了深入研究气泡在水中自由上升轨迹为之字形或螺旋形的运动机理,通过实验观察气泡上升运动过程及形状变化,从宏观受力的角度,将气泡路径和尾涡耦合起来,从两个正交角度进行拍摄,获得了气泡三维运动轨迹,分析了其运动波动特征,从浮力和尾涡牵引力的动态平衡解释了气泡之字形运动的机理。结果表明,之字形运动是由于气泡尾部涡的脱落及边缘负压大小的变化导致的,具体形成之字形还是螺旋形轨迹取决于低压点转移路径——沿经线还是纬线。对于扁平气泡,低压点沿经线转移,形成之字形轨迹;对于球度较圆气泡,低压点沿纬线转移,从而形成螺旋形运动轨迹。螺旋轨迹较之字形轨迹上升速度更快,振动频率更低。

**关键词:** 气泡路径;尾部涡脱落;尾部涡边缘;负压;振荡频率

**中图分类号:** O351.2 **文献标志码:** A

**DOI:** 10.7652/xjtuxb202303020 **文章编号:** 0253-987(2023)03-0212-09

## Study on the Mechanism of the Zigzag and Spiral Motion of Rising Bubbles in Water

MU Zhiqiang<sup>1</sup>, ZHANG Yajie<sup>1</sup>, WEI Yanju<sup>1</sup>, YANG Yajing<sup>2</sup>, LIU Shenghua<sup>1</sup>

(1. School of Energy and Power Engineering, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China

2. School of Aerospace Engineering, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China)

**Abstract:** In order to deeply study the movement mechanism of bubble's free rising trajectory in water in a zigzag or spiral shape, the rising movement process and shape change of bubble are observed through experiments. From the perspective of macro force, the bubble path and wake vortex are coupled, and the three-dimensional movement trajectory of a bubble is obtained by shooting from two orthogonal angles. Its motion fluctuation characteristics are analyzed, and the mechanism of the zigzag motion of bubbles is explained from the dynamic balance of buoyancy and wake drag. The results show that the zigzag motion is caused by the shedding of the vortex at the tail of the bubble and the change of the negative pressure at the edge. Whether the zigzag or spiral trajectory is formed depends on the transfer path of the low-pressure point—along the meridian or latitude line. For a flat bubble, the low-pressure point shifts along the meridians, forming a zigzag trajectory; and for the bubble with rounder sphericity, the low-pressure point shifts along the latitude line, thus forming a spiral trajectory. Compared with the zigzag trajectory, the spiral trajectory has a higher rising speed and a lower vibration frequency.

收稿日期: 2022-05-12。 作者简介: 穆志强(1998—),男,硕士生;魏衍举(通信作者),男,副教授,博士生导师。 基金项目: 国家自然科学基金面上项目(52176128)。

网络出版时间: 2022-07-13

网络出版地址: <https://kns.cnki.net/kcms/detail/61.1069.T.20220712.1827.006.html>

**Keywords:** bubble path; shedding of tail vortex; negative pressure; edge of trailing vortex; oscillation frequency

钝体的绕流运动(球体、圆盘等)广泛存在于自然现象和工业过程中,流体绕流钝体时,钝体边界上会产生流动分离,后部产生宽阔的尾流,并伴随涡旋脱落现象。很多研究通过实验或数值模拟等方式,探索出了静止球体绕流运动尾迹形态<sup>[1-3]</sup>,随着  $Re$  的增大,尾迹形态由轴对称静止环结构过渡到两个平行的反向旋转涡,再过渡到周期性脱落的发卡涡,最后变成湍流状态,涡分离点还可能绕球体旋转<sup>[4]</sup>。Magnaudet 等<sup>[5]</sup>通过对固定扁球泡的流动进行直接数值模拟,发现无滑移边界条件下,大  $Re$  时,涡度与  $Re^{0.5}$  成正比。尾流的不稳定运动来源于小扰动,且  $Re$  越大,尾流固有的不稳定性也会放大扰动,进而导致更加复杂的尾迹运动<sup>[6]</sup>。邓越等<sup>[7]</sup>通过数值模拟探索了低  $Re$  下圆柱绕流的涡激振动,交替振动的尾迹涡对圆柱升力及阻力系数的影响,探究了尾流运动对绕流体的作用力,然而没有考虑到受力绕流体产生运动后对尾流运动的影响及两者耦合后的运动特征。

尾流的不稳定将直接导致物体路径的不稳定<sup>[5,8-10]</sup>。气泡在静止水中上升时,存在一种反常的现象,即以之字形或螺旋形的路径上升<sup>[11-12]</sup>,这与卡门涡街的周期性摆动原理相关。此路径不是由相应  $Re$  下尾迹的空间组织直接产生的,而是由尾迹和已振荡路径之间的紧密耦合产生,路径同样也驱动着漩涡的脱落,两者共同作用导致了气泡流运动<sup>[9-10]</sup>。目前气泡流在广泛的地球物理和工业过程中发挥着重要作用,包括石油运输、化学反应器中的混合、合金的精炼、核反应器的冷却、两相热交换器、曝气过程、船舶流体力学和大气-海洋交换<sup>[13]</sup>。在冶金过程中,气泡被注入大块液态金属中,以推动液体运动,使熔体的物理和化学性质均匀化,或细化熔体<sup>[14]</sup>;在工业反应催化中,浮力粒子/气泡通常被释放,以增强流体中的混合<sup>[15-16]</sup>。这些应用领域极大地促进了气泡流的基础理论研究,而通过单个气泡路径与尾迹耦合现象的研究,将有助于我们了解气泡运动过程的基础理论,从而更科学地指导工程实践。

顾英杰等<sup>[17]</sup>利用(volume of fluid, VOF)方法

对静止水中气泡的自由上升过程进行了数值模拟,发现气泡上升过程中其尾流呈现对称脱落、过渡态和周期性脱落这三种运动状态,两临界  $Re$  随气泡直径的增大而增大,之字形运动的频率随气泡直径的增大而减小。何丹等<sup>[18]</sup>采用 Level Set 方法,直接数值模拟(DNS)了浮力作用下单个气泡的上升运动以探究初始形状对气泡运动和形状的影响。模拟结果表明,厄特沃什数  $Eo < 52$  时浮升气泡的最终形状和上升速度不受初始形状的影响;高  $Eo$  和低  $Mo$  时气泡受初始形状支配,呈球帽状和环状两种最终形状;初始高宽比越大,气泡越容易发展为环状,上升速度的脉动也越剧烈。张杰等<sup>[19]</sup>通过直接数值模拟方法(DNS)揭示了气泡界面上累积的流向涡量是触发之字形运动的原因。陈斌等人<sup>[20-21]</sup>针对无边界及垂直壁面附近静止水中单个气泡上升过程进行模拟,发现壁面对气泡周围流体的抑制是壁面对气泡作用力的原因,导致气泡偏离垂直壁面。Bintein 等<sup>[10]</sup>通过对穿在纤维上的液滴施加横向风实验,发现横向风诱导下液滴产生水平运动及两液滴未接触而产生反弹的现象,更加证明了尾迹涡对液滴运动较强的影响力,只是液滴被束缚在纤维中,其竖直方向路径无法研究。徐炯等<sup>[22]</sup>用高速摄影对稳定状态下静止气泡的运动形态进行分析,发现气泡直径  $d < 1\text{ mm}$  时,可看作稳定的刚性圆球; $d < 3\text{ mm}$  时,气泡产生的螺旋形漩涡符合卡门漩涡的规律; $d > 3\text{ mm}$  时,气泡以椭圆形运动,形状始终发生改变,旋转周期变小,不再符合卡门漩涡规律。左峥瑜<sup>[23]</sup>采用二维 PIV 法对气泡在水中之字形上升运动进行分析,发现气泡的形状、运动、尾迹之间存在相位耦合,并发现涡环的交替脱落及流量输运过程中的不对称现象,利用涡脱落机制从受力的角度解释了水平方向之字形运动的原因,但忽略了竖直方向气泡速度的振荡现象。

本研究通过实验观察气泡上升运动过程及形状变化,探索气泡尾迹与路径耦合的运动过程中,水平竖直等两个运动方向的运动规律,及尾涡摆动特征,从受力角度全面地解释气泡运动的机理。

# 1 实验装置及方法

本研究所用容器为 10 cm×10 cm×20 cm 方柱水箱,内置纯净水。实验时将注射器平底针头固定于缸底中心,出口朝上,用橡胶软管引出水面,连接在注射器上,手动生成气泡。通过更换不同内径针头产生不同气泡。如图 1 所示,采用阴影法用两个相机(Nikon D7100)从两个方向分别进行拍摄,其速度为 120 帧/s。最后利用 Tracker 软件追踪气泡位置与大小随时间的变化规律。

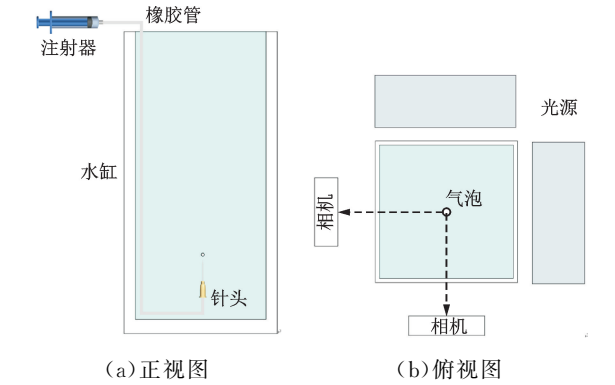


图 1 实验装置示意图

Fig. 1 Diagrammatic sketch of the experimental setup

以气泡脱离针头时刻当量直径代表其初始直径,如图 2 所示,而其瞬时直径,则以其侧视椭圆的当量直径表示

$$d = \frac{4S}{A} = \frac{4\pi ab}{2\pi b + 4(a - b)} \quad (1)$$

式中:  $S$  为有效面积;  $A$  为湿周;  $a$ 、 $b$  为椭圆的长轴及短轴。

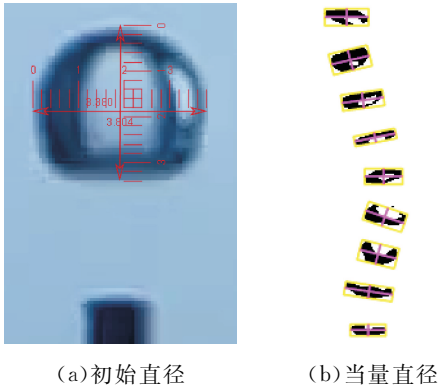
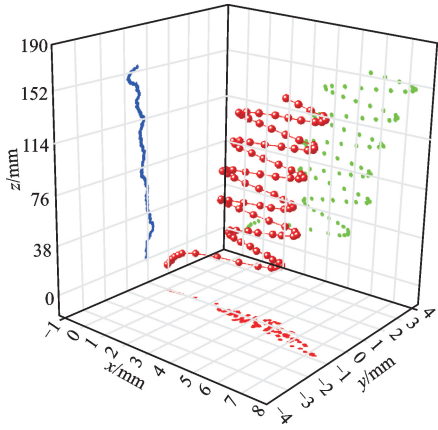


图 2 气泡初始直径与瞬时当量直径的测量

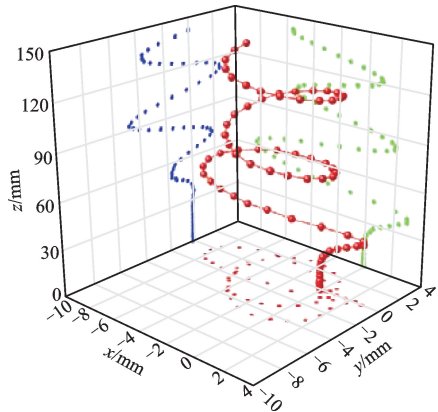
Fig. 2 Measurement of the (a) initial and (b) instant equivalent diameter of the rising bubble

# 2 实验结果与讨论

整体上,气泡脱离针头后开始上浮,开始时竖直向上做直线运动,上升一定距离后运动失稳,开始发生偏转,并左右摆动,产生之字形轨迹,或者螺旋轨迹,如图 3 所示。这种上升轨迹违反人类直觉,本文将逐步对其产生机理进行深入分析。



(a) 之字形轨迹



(b) 螺旋轨迹

图 3 气泡在水中的运动轨迹

Fig. 3 Path of bubble in water

## 2.1 竖直运动阶段

### 2.1.1 气泡的形变

气泡上升时,在流体对其迎流面滞止压、侧面流动负压、背流面负压及气泡内表面张力的共同作用下,其形状整体上趋向于扁平化。Cano-Lozano 等<sup>[24]</sup>发现,对于足够大的雷诺数  $Re (Re_{cri} = 240 \sim 470)$ ,前平后弯的不对称气泡的流动比完美球状气泡的流动更稳定。气泡尺寸越大,其表面张力引起的内压越小,因而变形程度也越大,如图 4 所示。

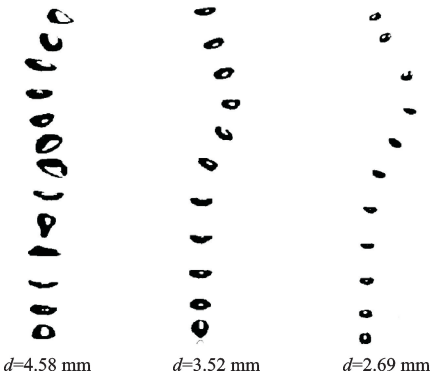


图4 不同直径气泡形状的变化

Fig. 4 Changes of bubble shapes with different diameters

2.1.2 气泡形变的影响

为考察气泡形状变化对其运动路径的影响,本文采用聚丙烯固体球(密度约为  $880\text{ g/cm}^3$ )进行对比,发现其上升轨迹仍然是之字形,如图5所示。这说明形变并非触发气泡之字形运动的充分条件,它也是一个运动伴随现象,是气泡适应流动的结果。

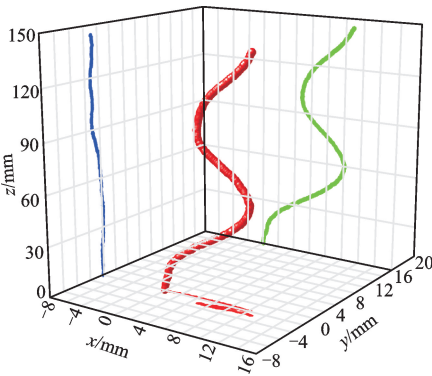


图5 固体球在水中的上升轨迹

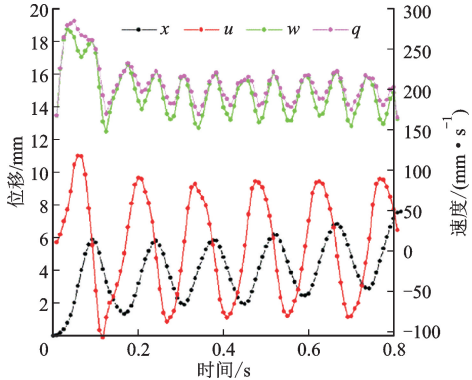
Fig. 5 Path of solid ball rising in water

2.2 之字型运动阶段

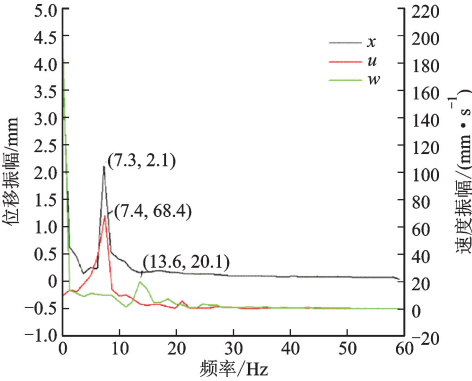
2.2.1 之字型轨迹运动特征及机理

触发之字形运动后,气泡轨迹开始偏转,首先发生之字形偏转。图6所示为之字形运动各参数变化曲线及频谱图, $x$ 方向为水平摆动方向, $z$ 方向为上升方向, $u$ 、 $w$ 分别为  $x$  方向、 $z$  方向速度, $q$  为合速度。之字形运动阶段,气泡运动具有如下规律:

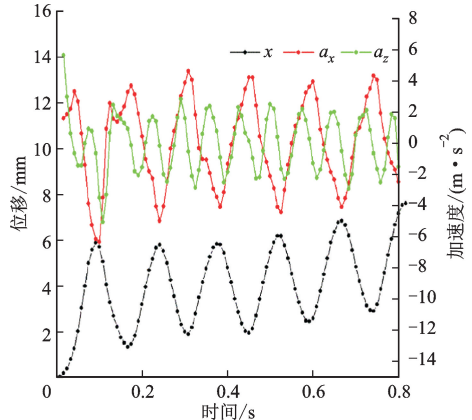
- (1)  $x$ 、 $z$  方向的速度和加速度均振荡变化;
- (2)  $x$  方向的速度和加速度与其轨迹频率保持一致, $z$  方向的速度和加速度频率约为轨迹频率的2倍;



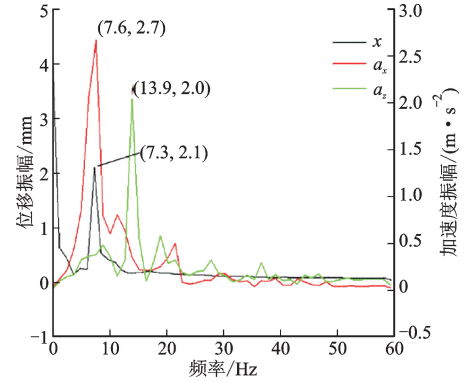
(a) 气泡位移、速度随时间的变化



(b) 气泡位移及速度频谱分析图



(c) 气泡位移、加速度随时间的变化



(d) 气泡位移、加速度频谱分析图

图6 气泡之字形运动规律

Fig. 6 Zigzag motion law of bubble

(3)  $\omega$  远大于  $u$ , 和  $q$  变化趋势一致;

(4) 气泡由转折点向一侧运动的  $1/2$  周期中,  $x$  方向前  $1/4$  周期气泡做加速度减小的加速运动, 后  $1/4$  周期做加速度增大的减速运动;  $z$  方向前  $1/4$  周期气泡做加速度先增大后减小的减速运动, 后  $1/4$  周期做加速度先增大后减小的加速运动, 2 个  $1/4$  周期内加速度方向不同。

气泡的运动与周围的流体有关, 其加速度可以相对地反映受力大小。气泡主要受浮力  $F_n$  及气泡尾部的牵引力  $F_v$  两个力影响。  $F_v$  来源于气泡尾部的涡流, 其边缘速度  $v$  约为来流速度(气泡上升速度), 根据伯努利方程, 可得漩涡边缘处的压力<sup>[25]</sup>为

$$p = p_0 - \frac{1}{2} \rho v^2$$

(2)

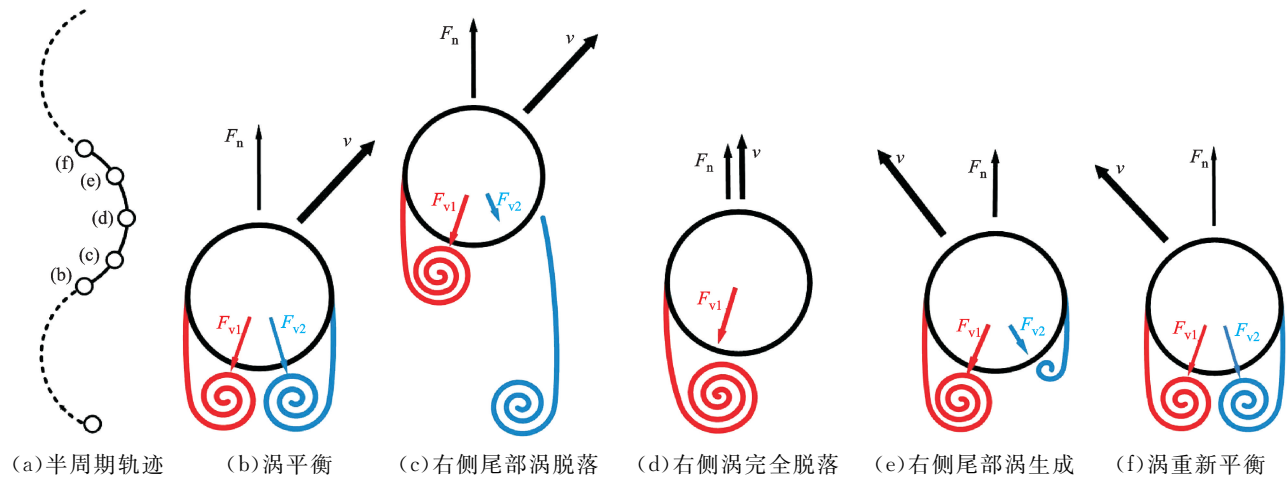


Fig. 7 Wake vortex and force diagram of half periodic motion of zigzag trajectory of bubble

表 1 气泡之字形轨迹半周期运动受力分析

Table 1 force diagram of half periodic motion of zigzag trajectory of bubble

| 气泡位置                       | 振荡中间位置(b)                      | 向 $x$ 方向运动的 $1/4$ 周期内(c)                    | 转折点(d)     | 向 $x$ 负方向运动的 $1/4$ 周期内(e)                   | 振荡中间位置(f)                       |
|----------------------------|--------------------------------|---------------------------------------------|------------|---------------------------------------------|---------------------------------|
| 尾涡情况                       | 涡平衡                            | 右侧尾部涡脱落                                     | 右侧涡全部脱落    | 右侧尾部涡生成                                     | 涡重新平衡                           |
| 所受牵引力 $F_v$ 和浮力 $F_n$ 变化情况 | 两侧 $F_v$ 平衡, 浮力 $F_n$ 与牵引力合力平衡 | 右后侧 $F_v$ 减小, 外力的合力方向左上                     | 外力的合力方向向左  | 右后侧 $F_v$ 出现, 外力的合力方向左下                     | 两侧 $F_v$ 平衡, $F_n$ 与 $F_v$ 合力平衡 |
| 气泡速度 $v$ 和牵引力 $F_v$ 的变化情况  | $v$ 最小                         | $v$ 增加 ( $a_z$ 为正), 尾部涡边缘流速增加, 左后侧 $F_v$ 增加 | $v$ 最大     | $v$ 降低 ( $a_z$ 为负), 尾部涡边缘流速降低, 左后侧 $F_v$ 减小 | $v$ 最小                          |
| $x$ 方向加速度 $a_x$            | $a_x$ 为 0                      | $a_x$ 反向增加                                  | $a_x$ 反向最大 | $a_x$ 反向减小                                  | $a_x$ 为 0                       |
| $z$ 方向加速度 $a_z$            | $a_z$ 为 0                      | $a_z$ 先增加 (右侧涡逐渐脱落) 后减小 (左侧涡涡强逐渐增大), 但始终为正  | $a_z$ 为 0  | $a_z$ 反向先增加 (左侧涡逐渐回复) 后减小 (左侧涡涡强逐渐减小), 始终为负 | $a_z$ 为 0                       |

来流速度越大, 漩涡边缘处的压力越小, 气泡受到的牵引力  $F_v$  就越大, 漩涡内部的流动情况这里不讨论, 因为它无法直接影响气泡的运动。浮力  $F_n$  与气泡体积有关, 空气是可压缩的, 其压缩性与马赫数  $Ma$  有关, 当  $Ma < 0.3$  低速流动时, 可视为不可压缩<sup>[26]</sup>, 因此这里可认为气泡体积不变, 浮力大小不变。

由图 6 可知, 气泡速度在某一范围内振荡, 无单调性变化, 即气泡所受浮力与尾涡牵引力达到动态平衡。图 7 为气泡运动的半个周期(运动轨迹为图 7(a)实线加粗部分)尾涡的变化, 右侧为  $x$  轴正向, 上侧为  $z$  轴正向, 其受力分析如表 1 所示。整个过程中, 气泡始终保持着竖直向上的速度。

2.2.2 之字型尾迹运动特征

气泡之字形运动阶段,频率  $f$  随直径  $d$  的增加而减小。根据下式

$$f = Sr \frac{v}{d} \tag{3}$$

其中  $v$ 、 $d$  取之字形运动过程的平均值,得到气泡之字形运动的  $Sr$  值约为 0.055,如图 8 所示,气泡轨迹频率即为尾迹涡频率。Tomboulides 等<sup>[27]</sup>通过黏性不可压缩球体绕流数值模拟,得到  $Re=1\,000$  时,球后尾迹脉动的  $Sr$  约为 0.195,大于气泡尾迹脉动频率,说明当尾迹涡驱动气泡产生之字形运动时,尾迹本身的振荡频率也受到了阻碍。

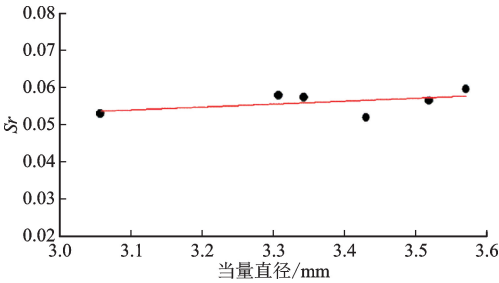


图 8 气泡之字形运动频率与直径的关系  
Fig. 8 Relationship between zigzag motion frequency and diameter of bubbles

2.3 螺旋形运动阶段

2.3.1 气泡运动的几种形式

气泡在水中的运动,除了之字形外,还可能继续向第 3 个维度发展,其整体的运动轨迹有图 9 所示的几种形式。

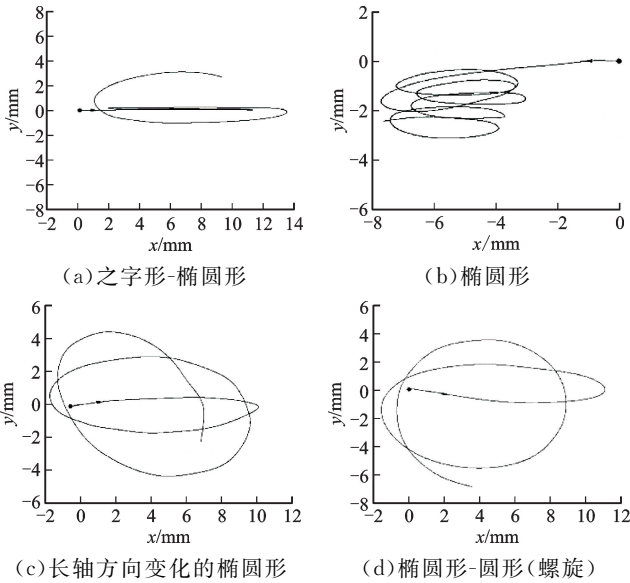
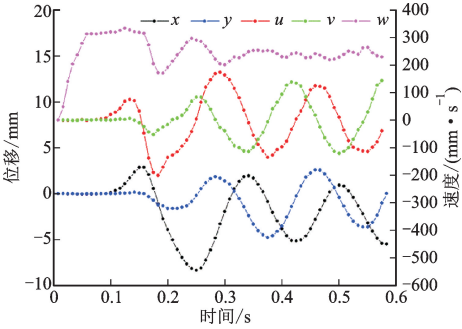


图 9 气泡的其他运动轨迹  
Fig. 9 Other paths of bubble

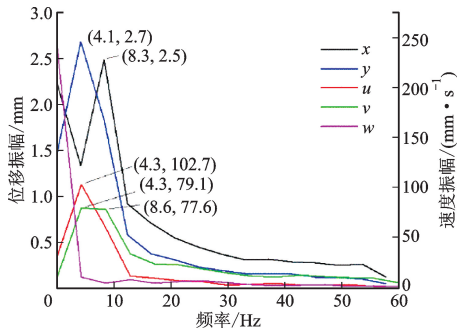
2.3.2 气泡螺旋运动轨迹特征

图 10 为气泡轨迹从竖直向上发展为之字形、最

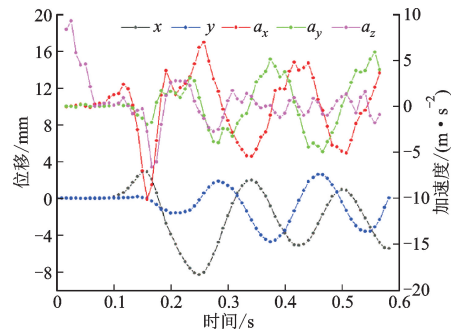
终发展为螺旋形过程中,  $x$ 、 $y$ 、 $z$  方向气泡速度和加速度变化曲线及螺旋形运动的频谱分析。0.1 s 后气泡由竖直运动发展为之字形运动,0.35 s 之后发展成较为标准的螺旋形轨迹。 $x$  和  $y$  方向的轨迹相差 1/4 个轨迹运动周期, $x$ 、 $y$  方向的位移和速度振荡频率发生在一个区间内, $z$  方向上速度没有振荡运动,加速度的频率约为  $x$ 、 $y$  方向频率的 4 倍。



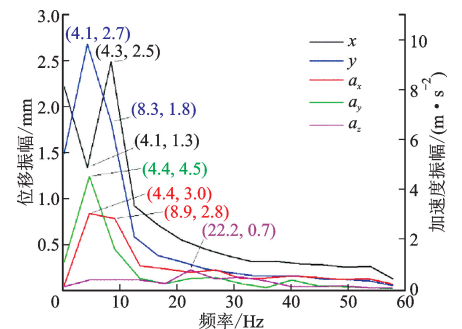
(a) 气泡位移、速度随时间的变化



(b) 气泡位移、速度频谱图



(c) 气泡位移、加速度随时间的变化



(d) 气泡位移、加速度频谱图

图 10 气泡螺旋形运动规律

Fig. 10 Zigzag motion law of bubble

由之字形运动机理可知,气泡的路径变化是由于尾涡脱落及其边缘负压区的变化,尾涡在一个平面左右两侧的不对称变化使气泡左右两侧受力不均从而产生之字形运动。气泡螺旋运动的速度在之字形运动速度振荡区间内,因此尾迹的不对称脱落模式未发生变化,与气泡之字形运动平面相垂直的方向发生扰动后,也会触发之字形运动,形成有规律的尾涡振荡运动,气泡轨迹进而向第 3 个方向( $y$  方向)发展形成三维螺旋运动。

同时,之字形运动尾部涡半周期内脱落一次,而  $x$ 、 $y$  方向的振荡运动相差  $1/4$  个周期,证明涡脱落点沿气泡尾部旋转。同时,两个相互垂直的方向尾部涡脱落的交错叠加,致使在一个运动周期内,  $z$  方向加速度的振荡频率是  $x$ 、 $y$  方向的 4 倍。

气泡运动过程中,由于气泡形状等种种因素,  $x$ 、 $y$  平面内发生的尾部涡的变化及脱落不一定完全相同,这导致了气泡轨迹多种多样,如图 9 所示。

### 2.3.3 气泡螺旋运动尾迹特征

气泡螺旋形运动的频率规律依旧可以用  $Sr$  来表示。图 11 给出了气泡螺旋形运动频率与直径的关系,  $Sr$  约在  $0.03 \sim 0.04$  之间,和之字形运动相比,由于一个周期内多发生了一组尾部涡的脱落,因此轨迹的振荡频率降低。

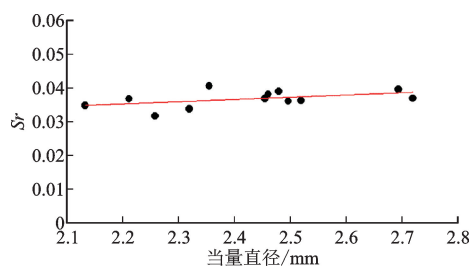


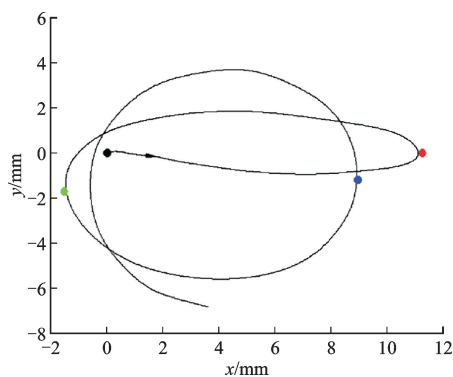
图 11 气泡螺旋形运动频率与直径的关系

Fig. 11 Relationship between spiral motion frequency and diameter of bubbles

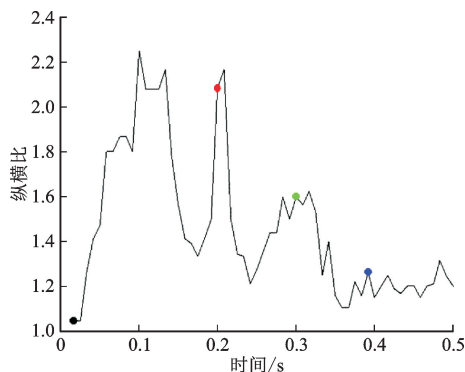
## 2.4 之字形与螺旋形运动的比较

### 2.4.1 气泡形状

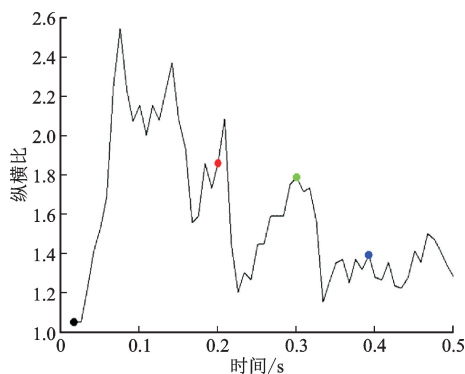
图 12 为气泡由之字形运动转变为螺旋形运动的  $xoy$  平面轨迹及两个垂直面内气泡的纵横比变化曲线,其中相同颜色的点代表同一时刻。气泡轨迹由二维之字形运动转变为三维螺旋运动时,纵横比的大小及其振荡幅度均逐渐减小。之字形运动时,气泡受一个平面内方向来回振荡的尾涡牵引力,形状变化剧烈;螺旋形运动时,尾涡绕气泡尾部旋转,因此其形状变化不大。



(a)  $xoy$  平面内轨迹



(b) 正面纵横比



(c) 侧面纵横比

图 12 气泡路径由之字形发展为螺旋形的形状纵横比变化

Fig. 12 The shape aspect ratio change of bubble path from zigzag to spiral

由图 12 同时可知,之字形运动气泡形状更扁,螺旋形运动气泡形状更圆。图 13 为气泡尾部低压区的移动情况,其中点代表低压区,之字形运动时形状较扁,气泡尾部低压区在一个平面内来回摆动,螺旋形运动时形状较圆,低压区绕气泡尾部转动。低压点的移动路径取决于气泡的球度:气泡越扁平,低压点趋向于通过极点转移,因而容易产生之字形路径;气泡越圆,则越容易绕纬线转移,从而产生螺旋路径。总之,沿经线或纬线转移时,低压点自动选择最短路径。

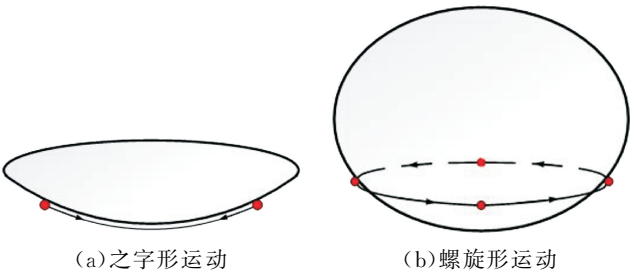


图 13 气泡尾部的低压区移动情况

Fig. 13 Movement of low pressure area at the end of bubble

2. 4. 2 运动速度

图 14 为直径为 3.5 mm 的气泡之字形运动和螺旋形运动的速度变化,螺旋形运动时的速度明显高于之字形运动。一般情况下,气泡之字形运动最终会转变为螺旋形运动,证明尾迹运动会使气泡逐步发展到速度更高的运动模式。

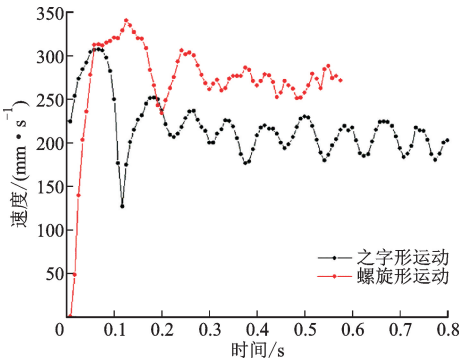


图 14 气泡之字形运动和螺旋形运动的速度比较

Fig. 14 Velocity comparison between zigzag and spiral motions of bubbles

3 结 论

本文通过实验探究气泡在水中的形状变化及运动规律,发现了气泡在水中不同的运动轨迹,并将路径和尾迹运动进行耦合以研究其运动机理,详细结论如下。

(1)气泡的形状变化不是触发之字形运动的原因,而是之字形运动的伴随结果。

(2)气泡之字形运动时,受到浮力和尾涡牵引力两者共同作用而达到动态平衡。尾涡的脱落及边缘负压值的振荡是导致气泡摆动的直接原因。

(3)气泡的之字形运动也会扩展到第 3 个方向,形成螺旋运动,此时尾部的低压区绕气泡尾部转动。

(4)尾迹涡影响气泡产生轨迹变形时,其本身的振荡频率也会受到阻碍。之字形运动振荡频率低于

绕流静止球体尾迹频率,螺旋形运动多发生了一组尾迹涡的脱落,其轨迹振荡频率更低。

(5)和之字形运动相比,螺旋形运动时气泡的形状更加偏球形,且速度也更大。

本文从宏观受力的角度,将气泡路径和尾涡耦合起来,合理地解释了气泡之字形和螺旋形运动的原因,分析了两者耦合后的种种现象。总之,本质上气泡在水中之字形上升和螺旋形上升轨迹,是卡门涡街引发的物体适应流场的结果,是尾涡、形状、路径耦合相互影响导致的结果。

参考文献:

[1] SAKAMOTO H, HANIU H. A study on vortex shedding from spheres in a uniform flow [J]. Journal of Fluids Engineering, 1990, 112(4): 386-392.

[2] STEWART B E, THOMPSON M C, LEWEKE T, et al. Numerical and experimental studies of the rolling sphere wake [J]. Journal of Fluid Mechanics, 2010, 643: 137-162.

[3] PRZADKA A, MIEDZIK J, GUMOWSKI K, et al. The wake behind the sphere; analysis of vortices during transition from steadiness to unsteadiness [J]. Archives of Mechanics, 2008, 60(6): 467-474.

[4] ACHENBACH E. Vortex shedding from spheres [J]. Journal of Fluid Mechanics, 1974, 62(2): 209-221.

[5] MAGNAUDET J, MOUGIN G. Wake instability of a fixed spheroidal bubble [J]. Journal of Fluid Mechanics, 2007, 572: 311-337.

[6] MITTAL R, NAJJAR F M. Vortex dynamics in the sphere wake [C]//30th Fluid Dynamics Conference. Reston, VA, USA: AIAA, 1999: AIAA 1999-3806.

[7] 邓跃. 低雷诺数下均匀流和振荡流共同作用的圆柱体受迫振动和涡激振动研究 [D]. 青岛: 中国海洋大学, 2014.

[8] MOUGIN G, MAGNAUDET J. Path instability of a rising bubble [J]. Physical Review Letters, 2002, 88(1): 014502.

[9] ERN P, RISSO F, FABRE D, et al. Wake-induced oscillatory paths of bodies freely rising or falling in fluids [J]. Annual Review of Fluid Mechanics, 2012, 44(1): 97-121.

[10] BINTEIN P B, BENSE H, CLANET C, et al. Self-propelling droplets on fibres subject to a crosswind [J]. Nature Physics, 2019, 15(10): 1027-1032.

[11] BRÜCKER C. Structure and dynamics of the wake of bubbles and its relevance for bubble interaction [J]. Physics of Fluids, 1999, 11(7): 1781-1796.

- [12] ELLINGSEN K, RISSO F. On the rise of an ellipsoidal bubble in water: oscillatory paths and liquid-induced velocity [J]. *Journal of Fluid Mechanics*, 2001, 440: 235-268.
- [13] MAGNAUDET J, EAMES I. The motion of high-reynolds-number bubbles in inhomogeneous flows [J]. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 2000, 32(1): 659-708.
- [14] ZHANG C, ECKERT S, GERBETH G. Experimental study of single bubble motion in a liquid metal column exposed to a DC magnetic field [J]. *International Journal of Multiphase Flow*, 2005, 31(7): 824-842.
- [15] MATHAI V, HUISMAN S G, SUN Chao, et al. Enhanced dispersion of big bubbles in turbulence [EB/OL]. [2022-03-10]. <https://arxiv.org/abs/1801.05461v1>.
- [16] ALMÉRAS E, RISSO F, ROIG V, et al. Mixing by bubble-induced turbulence [J]. *Journal of Fluid Mechanics*, 2015, 776: 458-474.
- [17] 顾英杰, 杨伟栋, 刘志远, 等. 气泡上升过程中尾流演变的 VOF 数值模拟 [J]. *化工学报*, 2021, 72(4): 1947-1955.
- GU Yingjie, YANG Weidong, LIU Zhiyuan, et al. Numerical simulation about evolution of bubble wake during bubble rising by VOF method [J]. *CIESC Journal*, 2021, 72(4): 1947-1955.
- [18] 何丹, 李彦鹏, 刘艳艳. 初始形状对浮升气泡动力特性的影响 [J]. *西安交通大学学报*, 2011, 45(1): 43-47.
- HE Dan, LI Yanpeng, LIU Yanyan. Effect of initial bubble shape on dynamics of a buoyancy-driven bubble [J]. *Journal of Xi'an Jiaotong University*, 2011, 45(1): 43-47.
- [19] ZHANG Jie, NI Mingjiu. What happens to the vortex structures when the rising bubble transits from zigzag to spiral? [J]. *Journal of Fluid Mechanics*, 2017, 828: 353-373.
- [20] 陈斌. 高粘度流体中上升气泡的数值模拟 [J]. *工程热物理学报*, 2006, 27(2): 255-258.
- CHEN Bin. Direct numerical simulation of rising bubbles in high viscosity fluids [J]. *Journal of Engineering Thermophysics*, 2006, 27(2): 255-258.
- [21] 陈斌, KAWAMURA T, KODAMA Y. 静止水中单个上升气泡的直接数值模拟 [J]. *工程热物理学报*, 2005, 26(6): 980-982.
- CHEN Bin, KAWAMURA T, KODAMA Y. Direct numerical simulations of a single bubble rising in still water [J]. *Journal of Engineering Thermophysics*, 2005, 26(6): 980-982.
- [22] 徐炯, 王彤, 杨波, 等. 静止水下气泡运动特性的测试与分析 [J]. *水动力学研究与进展: A 辑*, 2008, 23(6): 709-714.
- XU Jiong, WANG Tong, YANG Bo, et al. The measurement and analysis of motion behavior of bubbles in calm water [J]. *Chinese Journal of Hydrodynamics: part A*, 2008, 23(6): 709-714.
- [23] 左峥瑜, 余文轩, 高琪, 等. 单气泡上浮运动的层析 PIV 实验研究 [J]. *推进技术*, 2022, 43(1): 328-339.
- ZUO Zhengyu, SHE Wenxuan, GAO Qi, et al. Tomographic PIV experimental study on motion of rising single bubble [J]. *Journal of Propulsion Technology*, 2022, 43(1): 328-339.
- [24] CANO-LOZANO J C, TCHOUFAG J, MAGNAUDET J, et al. A global stability approach to wake and path instabilities of nearly oblate spheroidal rising bubbles [J]. *Physics of Fluids*, 2016, 28(1): 014102.
- [25] 张鸣远, 景思睿, 李国君. 高等工程流体力学 [M]. 西安: 西安交通大学出版社, 2006.
- [26] 曾玉超, 苏正, 吴能友, 等. 空气的压缩性对湍流边界层流场时均量的影响 [J]. *热力发电*, 2012, 41(4): 30-35, 39.
- ZENG Yuchao, SU Zheng, WU Nengyou, et al. Influence of air compressibility upon time-averaged quantities in flow field of turbulent boundary layer [J]. *Thermal Power Generation*, 2012, 41(4): 30-35, 39.
- [27] TOMBOULIDES A G, ORSZAG S A. Numerical investigation of transitional and weak turbulent flow past a sphere [J]. *Journal of Fluid Mechanics*, 2000, 416: 45-73.

(编辑 荆树蓉 杜秀杰)