

新型冠状病毒肺炎传播与控制数学建模研究

杨波¹, 于振华², 蔡远利¹

(1. 西安交通大学自动化科学与工程学院, 710049, 西安;

2. 西安科技大学计算机科学与技术学院, 710054, 西安)

摘要: 为了能准确模拟新型冠状病毒肺炎(COVID-19)的传播动态,给疫情防控政策制定提供一定的参考,提出了一个新的 COVID-19 传播非线性动力学模型。该模型考虑实际防控措施,将总人口分为易感、潜伏、隔离观察、无症状感染、有症状感染、住院隔离治疗和康复等 7 类人群;求出并分析了基本再生数;将模型的出院率和病死率拟合为时变函数,利用现有确诊病例数对模型其余参数和部分状态初值进行最小二乘拟合。分别利用湖北省武汉市和湖北省除武汉市外其他地区 20 天(2020 年 2 月 14 日~3 月 4 日)内感染 COVID-19 的实际数据对模型进行仿真验证,仿真结果表明,模型参数拟合的平均相对误差为 0.629%;与累计确诊病例数、累计治愈出院数和累计死亡病例数的实际数据相比,所提出模型的武汉市疫情预测平均相对误差分别为 0.772%、3.517% 和 2.025%,湖北省除武汉市外的地区的平均相对误差分别为 0.808%、2.241% 和 2.39%,表明该模型能较准确模拟 COVID-19 的传播动态,而且具有广泛的适用性。对模型参数进行敏感性分析,讨论了各种防控措施对 COVID-19 传播的影响,结果表明,最有效的防控措施依次为减少人与人之间的接触、加强密切接触者的追踪隔离、加大检测和治疗能力使感染者尽快隔离治疗等。

关键词: 新型冠状病毒肺炎;传播模型;基本再生数;参数估计;灵敏度分析

中图分类号: O193;O29 **文献标志码:** A

DOI: 10.7652/xjtuxb202111018 **文章编号:** 0253-987X(2021)11-0162-11



OSID 码

Mathematical Modeling for Spread and Control of COVID-19

YANG Bo¹, YU Zhenhua², CAI Yuanli¹

(1. School of Automation Science and Engineering, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China;

2. College of Computer Science and Technology, Xi'an University of Science and Technology, Xi'an 710054, China)

Abstract: In order to accurately simulate the spread of the coronavirus disease 2019 (COVID-19) and provide certain reference for formulation of epidemic prevention and control policies, a new nonlinear dynamics model is presented. Considering real prevention and control measures, the total population is divided into seven groups in the model, including susceptible, latent, quarantined, asymptomatic, symptomatic, hospitalized and recovered groups. The basic reproduction number is calculated and analyzed. The cure rate and mortality rate are fitted as time-varying functions, and the remaining parameters and initial values of some states are fitted by least squares with the number of currently confirmed cases. The real data of COVID-19 in Wuhan and other regions of Hubei Province within 20 days (February 14 to March 4, 2020) are used to simulate and verify the model. Simulation results show that the mean relative error of fitting is 0.629%. Compared with the real data of cumulatively confirmed cases, cured cases and

收稿日期: 2021-04-07。 作者简介: 杨波(1982—),男,博士生;蔡远利(通信作者),男,教授,博士生导师。 基金项目: 国家重点研发计划资助项目(2018YFB1700100);国家自然科学基金资助项目(61873277)。

网络出版时间: 2021-07-20

网络出版地址: <http://kns.cnki.net/kcms/detail/61.1069.T.20210716.1127.008.html>

deaths, the mean relative errors of the epidemic prediction by the model in Wuhan are 0.772%, 3.517%, and 2.025%, respectively, and in other regions of Hubei Province are 0.808%, 2.241% and 2.39%, respectively. It indicates that the model can accurately simulate the spread of COVID-19 and has a wide range of applicability. Moreover, sensitivity analysis is made and simulated on the model parameters. The impacts of various prevention and control measures on the spread of COVID-19 are discussed. The analysis results show that the most effective prevention and control measures include reducing contact among people, strengthening tracking and quarantine of close contacts, and increasing detection and treatment capabilities so that the infected people can be isolated and treated as soon as possible.

Keywords: coronavirus disease 2019 (COVID-19); spread model; basic regenerative number; parameter estimation; sensitivity analysis

新型冠状病毒(SARS-CoV-2)^[1-2]出现以来,由于早期对其缺乏足够的认识,在多个地区出现了扩散和大流行,对全世界产生了巨大的影响。这种病毒所引起的传染性肺炎疫情被世界卫生组织命名为“Coronavirus disease 2019”(COVID-19)^[3]。为了遏制疫情的扩散,中国政府采取了一系列高效严格的防控措施^[4],已经完全控制住了疫情,但是在世界其他地区,COVID-19 疫情依然在继续,感染人数和死亡人数不断增加,严重影响了人们的正常生活和工作,给各国社会经济造成巨大损失,给人们生命健康造成重大威胁。据世界卫生组织的报告,截止 2021 年 04 月 07 日,全球已有 131 487 572 人感染 COVID-19,因病死亡人数达 2 857 702^[5]。特别是 2020 年 12 月 14 日,英国报告了 COVID-19 的一种新的变异毒株,其传染性可能更强^[6],现已在世界范围内传播。不仅如此,最近已发现多种变异毒株,给疫情防控带来更大挑战。目前,疫情仍在世界范围内广泛传播,针对 COVID-19 还没有特效药物,而疫苗供应量有限,不能满足目前的需求,因此高效严格的非药物防控措施仍是减缓疫情扩散的最有效途径,特别是欠发达国家和地区。各国政府和人民依然在共同努力,加强防控,希望早日控制住 COVID-19 的进一步传播,让世界恢复昔日的繁荣。

数学模型是定量分析各种传染病传播动态(包括网络病毒的传播,例如文献[7-9])的重要工具,它能模拟和预测疫情的发展趋势,为制定相关的防控措施提供一定的参考。根据 COVID-19 疫情的特点,已建立了很多相关的数学传播模型,例如文献[10-21]等。但在这些模型中,文献[12-14,17-20]中没有考虑无症状感染者,而文献[11,15]中没有考虑无症状感染者可以发展为有症状的情况,文献[16]中没有考虑潜伏期。本文主要考虑政府的严格防控

措施对疫情的影响,建立相应的非线性动力学传播模型,模拟 COVID-19 的传播动力学。模型除了考虑严格的防控措施外,还考虑了无症状感染者以及无症状感染者可以发展为有症状等实际情况。求出了模型的基本再生数;应用武汉市真实报告数据,对模型参数和状态初值进行了估计,用所建模型分别模拟了 COVID-19 在武汉市和湖北省除武汉市外地区的传播动态,并与实际报告数据对比。对参数做了灵敏度分析,并进行了仿真验证,为疫情的有效防控提供一定参考。

1 模型的建立

对于 COVID-19,还有很多未解之谜有待解开,但是以目前的研究和数据来看,COVID-19 的传播机理是基本清楚的。人们感染 COVID-19 后,会有一段时间的潜伏期,之后会发展为无症状或有症状的感染者。由于 COVID-19 的传染力较强,故需要对患者和疑似患者进行隔离治疗,对密切接触者实施隔离观察。除此之外,根据疫情的发展情况,政府部门还出台了一些措施,包括交通管制,限制旅行、聚集,保持社交距离,商场停业、学校停课、工厂停产等,以减少易感人群感染 COVID-19 的机率。根据 COVID-19 的传播特点和部分严格的疫情防控措施,将人群分为 7 组:易感人群(S)、潜伏期人群(E)、隔离观察人群(Q)、无症状感染者(A)、有症状感染人群(I)、感染后住院隔离治疗人群(J)、康复人群(R)。

根据实际防控措施,做如下假设:①所有未感染 COVID-19 的人都是易感的;②E 类人 是被感染,没有症状,但不具有传染性,E 类人群主要是感染者的密切接触者(暴露者),一旦被跟踪到,将被医学隔离观察,即成为 Q 类;③Q 类人一旦确诊将进入医院

隔离治疗,即成为J类;④A类人群是被感染了,没有症状,但具有传染性,这是区别于E类人群的,且A类人可发展为有症状的I类;⑤A和I类人群一旦被确诊,将进入医院隔离治疗,即成为J类,他们也可以自愈,直接成为R类人群;⑥重症患者都就医治疗,故因病死亡者只包括在医院治疗无效死亡的人;⑦防护措施得当,操作规范、严格,因此Q和J类人群不会再传染其他人;⑧感染者康复后,即R类人群,具有对COVID-19的免疫,即短时间内不会被再次传染。

不同组群之间的具体转换关系如图1所示,参数说明见表1。建立如下非线性动力学模型

$$\left. \begin{aligned} \frac{dS(t)}{dt} &= M - \frac{uS(t)(\alpha A(t) + \beta I(t))}{N(t) - Q(t) - J(t)} - vS(t) \\ \frac{dE(t)}{dt} &= \frac{uS(t)(\alpha A(t) + \beta I(t))}{N(t) - Q(t) - J(t)} - (\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + v)E(t) \\ \frac{dQ(t)}{dt} &= \delta_1 E(t) + \sigma_1 A(t) - (\eta_1 + \eta_2 + v)Q(t) \\ \frac{dA(t)}{dt} &= \delta_2 E(t) - (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 + v)A(t) \\ \frac{dI(t)}{dt} &= \delta_3 E(t) + \sigma_2 A(t) - (\gamma_1 + \gamma_2 + v)I(t) \\ \frac{dJ(t)}{dt} &= \gamma_1 I(t) + \eta_1 Q(t) - (\theta + \mu + v)J(t) \\ \frac{dR(t)}{dt} &= \sigma_3 A(t) + \eta_2 Q(t) + \gamma_2 I(t) + \theta J(t) - vR(t) \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

式中: M 表示平均每天新增人口; $S(t)$ 、 $E(t)$ 、 $Q(t)$ 、 $A(t)$ 、 $I(t)$ 、 $J(t)$ 和 $R(t)$ 表示 t 时刻各人群数; $N(t) = S(t) + E(t) + Q(t) + A(t) + I(t) + J(t) + R(t)$ 为 t 时刻总人口数。其初始条件为

$$(S(0), E(0), Q(0), A(0), I(0), J(0), R(0)) \geq 0 \quad (2)$$

状态空间为

$$R_+^7 = \{(S(t), E(t), Q(t), A(t), I(t), J(t), R(t))\}$$

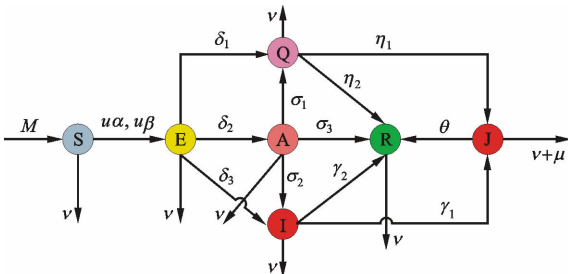


图1 人群演化示意图

Fig. 1 Evolution of population

$$R(t)) : (S(t), E(t), Q(t), A(t), I(t), J(t), R(t)) \geq 0 \quad (3)$$

命题1 设初值条件为

$$(S(0), E(0), Q(0), A(0), I(0), J(0), R(0)) > 0 \quad (4)$$

则系统(1)的解满足: $\forall t > 0$, 有

$$(S(t), E(t), Q(t), A(t), I(t), J(t), R(t)) > 0 \quad (5)$$

证明:用反证法证明。若不然,设存在 $t_1 > 0$,使得 $S(t)$ 、 $E(t)$ 、 $Q(t)$ 、 $A(t)$ 、 $I(t)$ 、 $J(t)$ 、 $R(t)$ 中至少有一个是非正的。由连续性可知,存在 $0 < t_0 \leq t_1$,使得这7个状态变量中至少有一个为0,不妨设 t_0 是满足该条件的最小值。

(a)若 $S(t_0) = 0$,则其余状态变量在 t_0 处都是非负的,且 $\frac{dS(t)}{dt} \Big|_{t=t_0} = M > 0$ 。由连续性可知,存在 $\epsilon > 0$, $S(t)$ 在区间 $(t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon)$ 内严格单调递增。取 $t_2 \in (t_0 - \epsilon, t_0)$,则 $S(t_2) < S(t_0) = 0$,而 $S(0) > 0$,由零点定理知在0到 t_2 之间还存在 $S(t)$ 的零点,这与 t_0 的取法矛盾。

(b)若 $S(t_0) > 0$, $E(t_0) = 0$,则

$$\frac{dE(t)}{dt} \Big|_{t=t_0} = \frac{uS(t_0)(\alpha A(t_0) + \beta I(t_0))}{N(t_0) - Q(t_0) - J(t_0)} \geq 0 \quad (6)$$

$A(t_0) > 0$ 或 $I(t_0) > 0$,此时 $\frac{dE(t)}{dt} \Big|_{t=t_0} > 0$,类似(a)的分析,这会导致与 t_0 的取法矛盾;

$A(t_0) = I(t_0) = 0$,此时 $\frac{dE(t)}{dt} \Big|_{t=t_0} = 0$ 。而满足

初值 $E(0) = 0$ 的解为 $E(t) = 0$,但 $E(0) > 0$, $E(t_0) = 0$ 与解的唯一性矛盾。

(c)若 $S(t_0) > 0$, $E(t_0) > 0$,而 $Q(t_0) = 0$,则

$$\frac{dQ(t)}{dt} \Big|_{t=t_0} = \delta_1 E(t_0) + \sigma_1 A(t_0) > 0 \quad (7)$$

类似(a)的分析,这会导致与 t_0 的取法矛盾,故而 $Q(t_0) > 0$ 。同理可得 $A(t_0) = 0$ 、 $I(t_0) = 0$ 、 $J(t_0) = 0$ 、 $R(t_0) = 0$ 都会产生矛盾,故 $S(t)$ 、 $E(t)$ 、 $Q(t)$ 、 $A(t)$ 、 $I(t)$ 、 $J(t)$ 、 $R(t)$ 都是正的。

命题2 系统(1)是有界的。

证明:将系统(1)的所有方程加起来可得

$$\frac{dN(t)}{dt} = M - vN(t) - \mu J(t) \leq M - vN(t) \quad (8)$$

上述不等式两边同乘以 e^{vt} ,有

$$\frac{d}{dt}(e^{vt} N(t)) \leq M e^{vt} \quad (9)$$

则有

$$\int_0^t \frac{d}{dt}(e^u N(t))dt \leq \int_0^t M e^u dt \tag{10}$$

$$N(t) \leq \frac{M}{v} + \left(N(0) - \frac{M}{v}\right)e^{-u} \tag{11}$$

取 $\widetilde{M}=\max\left\{N(0),\frac{M}{v}\right\}$, 则有 $0\leq N(t)<\widetilde{M}$, 即系统(1)是有界的。

上述命题表明

$$\Omega=\{(S(t),E(t),Q(t),A(t),I(t),J(t),R(t)): (S(t),E(t),Q(t),A(t),I(t),J(t),R(t))\geq 0; S(t)+E(t)+Q(t)+A(t)+I(t)+J(t)+R(t)\leq \widetilde{M}\} \tag{12}$$

为系统(1)的正不变集。

表 1 模型(1)参数说明

Table 1 Parameter descriptions of model I

参数	说明
α	无症状感染者的传染率
β	有症状感染者的传染率
δ_1	暴露者的检疫隔离率
δ_2	未被检疫隔离的暴露者转为无症状感染者的概率
δ_3	未被检疫隔离的暴露者转为有症状感染者的概率
η_1	检疫隔离者症状加重而住院的概率
η_2	检疫隔离者的康复率
σ_1	未被检疫隔离的无症状感染者的检疫隔离率
σ_2	未被检疫隔离的无症状感染者发展为有症状的概率
σ_3	未被检疫隔离的无症状感染者的康复率
γ_1	未被检疫隔离的有症状感染者的住院率
γ_2	未被隔离的有症状感染者的康复率
v	自然死亡率
u	对易感人群的控制措施力度

2 基本再生数

模型的基本再生数 R_0 是指一个感染者(病人)在平均感染期内所传染的人数,是研究传染病的一个重要概念,是判断传染病是否会消亡的阈值。当 $R_0<1$ 时表明一个感染者在平均感染期内能传染的人数小于 1,意味着传染病将逐步消亡;反之,当 $R_0>1$, 传染病将始终存在,不会消亡^[22]。因此要消灭传染病,需要通过分析 R_0 ,制定相应的防控措施,使其减小到 1 以下。

首先求出模型的无病平衡点。令模型(1)中 7 个方程全等于 0,由 $A(t)=I(t)=0$,可得 $E(t)=Q(t)=J(t)=0$,从而得无病平衡点

$$P_0=\left(\frac{M}{v},0,0,0,0,0,0\right) \tag{13}$$

应用下一代矩阵方法^[23-24]求 R_0 。设

$$F=\begin{bmatrix} \frac{uS(t)(\alpha A(t)+\beta I(t))}{N(t)-Q(t)-J(t)} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{14}$$

$$V=\begin{bmatrix} \delta E(t) \\ -\delta_1 E(t)-\sigma_1 A(t)+\eta Q(t) \\ -\delta_2 E(t)+\sigma A(t) \\ -\delta_3 E(t)-\sigma_2 A(t)+\gamma I(t) \\ -\gamma_1 I(t)-\eta_1 Q(t)+mJ(t) \end{bmatrix} \tag{15}$$

其中

$$\left. \begin{aligned} \delta &= \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + v \\ \eta &= \eta_1 + \eta_2 + v \\ \sigma &= \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 + v \\ \gamma &= \gamma_1 + \gamma_2 + v \\ m &= \theta + \mu + v \end{aligned} \right\} \tag{16}$$

F 和 V 在 P_0 处的雅克比矩阵分别为

$$\widetilde{F}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & u\alpha & u\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{17}$$

$$\widetilde{V}=\begin{bmatrix} \delta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\delta_1 & \eta & -\sigma_1 & 0 & 0 \\ -\delta_2 & 0 & \sigma & 0 & 0 \\ -\delta_3 & 0 & -\sigma_2 & \gamma & 0 \\ 0 & -\eta_1 & 0 & -\gamma_1 & m \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} V_1 & \mathbf{0} \\ V_2 & V_3 \end{bmatrix} \tag{18}$$

其中

$$V_1=\begin{bmatrix} \delta & 0 & 0 \\ -\delta_1 & \eta & -\sigma_1 \\ -\delta_2 & 0 & \sigma \end{bmatrix} \tag{19}$$

$$V_2=\begin{bmatrix} -\delta_3 & 0 & -\sigma_2 \\ 0 & -\eta_1 & 0 \end{bmatrix} \tag{20}$$

$$V_3=\begin{pmatrix} \gamma & 0 \\ -\gamma_1 & m \end{pmatrix} \tag{21}$$

则

$$\widetilde{V}^{-1}=\begin{bmatrix} V_1 & \mathbf{0} \\ V_2 & V_3 \end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix} V_1^{-1} & \mathbf{0} \\ -V_3^{-1}V_2V_1^{-1} & V_3^{-1} \end{bmatrix} \tag{22}$$

从而可得基本再生数

$$R_0 = \rho(\tilde{F}\tilde{V}^{-1}) = u \left(\frac{\alpha\delta_2}{\delta\sigma} + \frac{\beta\delta_3\sigma + \beta\sigma_2\delta_2}{\delta\sigma\gamma} \right) \quad (23)$$

分析 R_0 的表达式, 不难发现采取如下措施可以使其减小: ①加大对密切接触者(暴露者)检疫隔离力度, 则遗漏在易感人群中的感染者(A 和 I 类)将变少, 即 σ_1 增大, 此时 δ_2 和 δ_3 会减小; ②加强无症状感染者的隔离和治疗, 即 σ_1 和 σ_3 增大; ③医疗资源允许的情况下, 让有症状感染者尽可能入院治疗, 即 γ_1 和 γ_2 增大; ④加强对易感人群的管控, 如加强疫情防控宣传, 控制人员流动, 保持一定的社交距离, 关闭人群容易聚集的场所等, 即 u 减小。

上述措施中①和④是最有效果的, 可以明显减小 R_0 , 这与实际相符, 特别是措施④。

3 模型验证

本节利用 COVID-19 在武汉市传播的相关实际报告数据拟合模型参数并验证模型。为了说明模型具有广泛的适用性, 将模型应用于湖北省除武汉市外的地区。

3.1 参数拟合

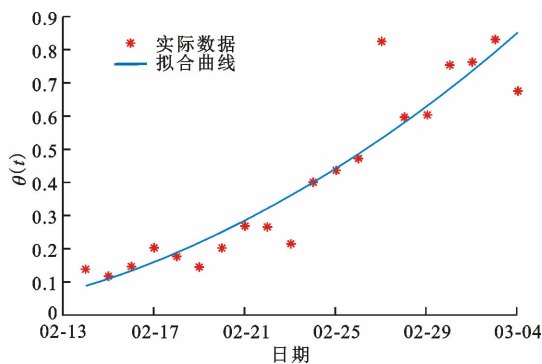
用模型(1)来模拟 COVID-19 在中国武汉市的传播。利用武汉市的 COVID-19 相关数据对模型中的参数和状态初值进行估计。初期由于大量人员被感染, 致使医疗资源被严重挤兑, 包括病床数量、医护人员、医疗防护物资等严重缺乏, 很多病人无法入院治疗。轻症患者被要求在家自我隔离, 这导致家庭成员感染增加, 无法阻断 COVID-19 的传播。2020 年 2 月上旬开始, 在中国政府的强有力干预下, 迅速改造了大量现有医院, 新建了两所大型临时医院, 用于收治重症病例; 从其他省调集了大量医护人员和医疗物资驰援武汉市; 将会展中心等大型公共场所改造为简易临时医院, 即所谓的“方舱医院”, 集中收治轻症患者; 将酒店、学校等设置为医学隔离观察点, 用于隔离观察密切接触者等。这些措施的目的是将感染者尽可能的都集中起来, 进行医学隔离治疗或观察, 彻底切断 COVID-19 的传染源。

本文模型正是基于这些强有力的措施而建立的。前期由于疑似病人较多, 而每天核酸检测能力有限, 有很多病例没有得到及时确诊, 因此前期数据不够准确。基于以上原因, 选取武汉市 2020 年 2 月 14 日~3 月 4 日共 20 天的数据对模型进行校准, 即对模型中的参数和状态初值进行拟合, 使用的实际报告数据来源于中国国家卫生健康委员会官网^[25]。随着医护人员和医疗物资的补充, 诊疗经验的积累,

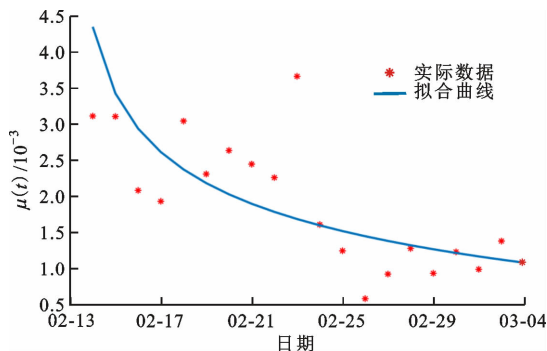
病死率逐渐减小, 治愈率不断提高, 因此假设 $\theta = \theta(t)$, $\mu = \mu(t)$ 都是时间的函数, 这更加符合实际。卫生部门实时报告数据主要有: 确诊人数(住院人数)、死亡人数、出院人数等。首先根据实际报告数据, 对 $\theta(t)$ 和 $\mu(t)$ 进行拟合, 如图 2 所示。图中红色点是由实际报告数据计算得到的值, 曲线是拟合的。分别用二次函数和负幂指数函数拟合每天的治愈率和病死率, 得

$$\theta(t) = 0.000\ 099\ 363t^2 + 0.001\ 939\ 74t + 0.006\ 688\ 72 \quad (24)$$

$$\mu(t) = 0.007\ 743\ 668\ 47t^{-0.183\ 432\ 3} - 0.003\ 384\ 146 \quad (25)$$



(a) 治愈率



(b) 病死率

图 2 $\theta(t)$ 和 $\mu(t)$ 的拟合(武汉市)

Fig. 2 Fitting of $\theta(t)$ and $\mu(t)$ (in Wuhan)

确诊病例基本都是无症状的感染者, 且一旦确诊就会进入医院隔离治疗, 即确诊人数就是住院人数, 包括医院和方舱医院所有病人。利用现有确诊病例数(当前在医院隔离治疗的病例数)的实际数据与模型的解 $J(t)$ 做最小二乘拟合^[16], 估计模型中参数值和状态初值。由于政府实施的强力防疫措施和民众的积极配合, 取 $u=0.3$ 。且此时人口流动几乎没有, 20 天内的出生人口有限, 故可以认为 $M=0$ 。武汉市人口大约 1 000 万, 受疫情防控措施的影响以

及对病毒的认识,绝大多数人都尽量不出门,不与外界接触,故假设实际易感人数初值为 10 万。以 2020 年 2 月 14 日为 $J(t)$ 时刻,武汉市现有确诊病例数拟合仿真如图 3 所示,其中红色点表示真实报告数据,蓝色曲线表示模型解 $J(t)$ 。模型参数的估计值见表 2,状态初始值见表 3。

表 2 模型(1)参数值及其灵敏度指数

Table 2 Values and sensitivity index of parameters of model I

参数	取值	来源	灵敏度指数
α	0.45	假设	0.150 40
β	2.871	拟合	0.849 60
δ_1	0.767 18	拟合	-0.976 73
δ_2	0.010 95	拟合	0.365 82
δ_3	0.007 29	拟合	0.610 96
η_1	0.138 25	拟合	
η_2	0.068 21	拟合	
σ_1	0.207 81	拟合	-0.188 17
σ_2	0.103 25	拟合	0.135 87
σ_3	0.108 3	拟合	-0.098 06
γ_1	0.102 09	拟合	-0.576 49
γ_2	0.048 33	拟合	-0.272 91
ν	0.000 035 89	文献[10]	
u	[0,1]	假设	1

表 3 模型(1)状态初值(武汉市)

Table 3 Initial state values of model I (in Wuhan)

初始状态	取值	来源
$S(0)$	100 000	假设
$E(0)$	6 452	拟合
$Q(0)$	10 080	拟合
$A(0)$	930	拟合
$I(0)$	441	拟合
$J(0)$	34 289	实际
$R(0)$	5 000	假设
$J_c(0)$	37 914	实际
$Z(0)$	2 502	实际
$D(0)$	1 123	实际

用平均相对误差来衡量拟合的效果。平均相对误差定义如下

$$E_{\text{MRE}} = \frac{1}{N_T} \sum_{i=1}^{N_T} \frac{|X(i) - \hat{X}(i)|}{X(i)} \times 100\% \quad (26)$$

式中: $X(i)$ 表示真实值; $\hat{X}(i)$ 表示拟合值(模型的

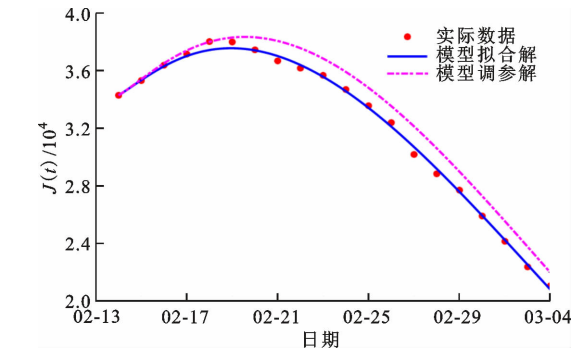


图 3 现有确诊病例数(武汉市)

Fig. 3 Currently confirmed case number (in Wuhan)

解); N_T 是数据个数。根据上式计算得到现有确诊病例拟合的平均相对误差 $E_{\text{MRE}} = 0.629\%$,拟合效果较好。

3.2 模拟 COVID-19 在武汉市的传播

利用累计确诊病例数、治愈出院病例数和死亡病例数的实际报告数据来验证模型。根据模型(1),第 t 天累计确诊病例数(住院病例数)为

$$J_c(t) = \int_0^t [\gamma_1 I(t) + \eta_1 (Q(t))]t + J_c(0) \quad (27)$$

第 t 天累计治愈出院病例数 $Z(t)$ 和病死数 $D(t)$ 分别为

$$Z(t) = \int_0^t \theta(t)J(t)dt + Z(0) \quad (28)$$

$$D(t) = \int_0^t \mu(t)J(t)dt + D(0) \quad (29)$$

其中 $J_c(0)$ 、 $Z(0)$ 和 $D(0)$ 分别为 2020 年 2 月 14 日实际报告的累计确诊病例数、治愈出院病例数和死亡病例数,见表 3,武汉市 COVID-19 的实际与模拟传播动态如图 4 所示。与真实数据相比,各类病例数的平均相对误差见表 4。从图 4 和表 4 中可以看出,模型(1)与实际数据基本吻合,能反映在政府强有力干预下 COVID-19 在武汉市的传播动态。此时,基本再生数 R_0 为 0.085 66,已远小于 1 了,可以说已基本控制住了 COVID-19 的传播,符合实际情况。

表 4 各类病例数的平均相对误差

Table 4 Mean relative error of various cases

地区	平均相对误差/%			
	现有确诊 病例数	累计确诊 病例数	累计治愈 病例数	累计病 死数
湖北省 武汉市	0.629	0.772	3.517	2.025
湖北省 (除武汉)	0.833	0.808	2.241	2.39

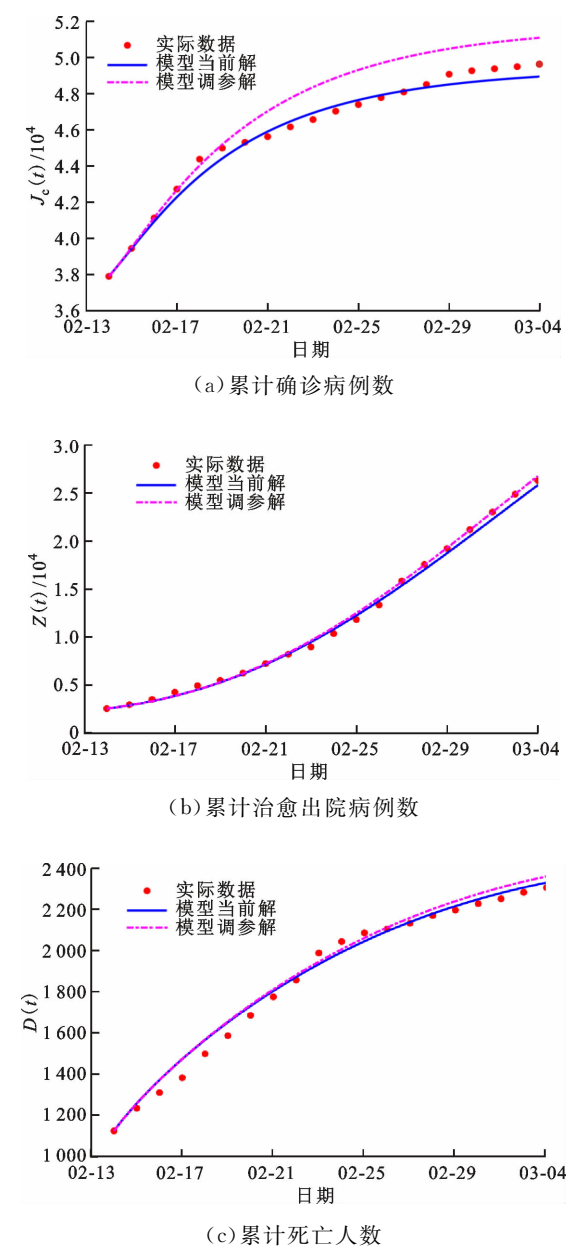


图 4 COVID-19 的实际与模拟传播动态(武汉市)

Fig.4 Real and simulated spread dynamics of COVID-19 (in Wuhan)

3.3 模拟 COVID-19 在湖北省(除武汉市)的传播

模型(1)不仅适用于 COVID-19 在武汉市的传播,也适用于其他对疫情严格防控的地区。本小节以湖北省除武汉市外的其他地区为研究对象,验证模型(1)。由于疫情中心是武汉市,故假设湖北省其他地区的防控力度稍稍弱于武汉市,即取 $u=0.4$ 。模型其他参数采用 3.1 节中的拟合参数(见表 2),结合实际数据,只需对部分状态初值进行拟合。时间范围同样取 2020 年 2 月 14 日~3 月 4 日内的 20 天。类似地,首先根据实际数据的分布,分别用一次函数和常数拟合湖北省(除武汉市)每天的治愈率

$\theta(t)$ 和病亡率 μ ,拟合图如图 5 所示,结果如下

$$\theta(t)=0.006\ 971t+0.012\ 384\ 6 \tag{30}$$
$$\mu=0.001\ 677\ 41 \tag{31}$$

同样利用现有确诊病例数的实际数据与模型的解 $J(t)$ 做拟合,现有确诊病例数(湖北省(除武汉市))如图 6 所示,状态初值见表 5。类似地,计算得到现有确诊病例拟合的平均相对误差为 $E_{\text{MRE}}=0.833\%$ 。

20 天内新增确诊病例数、累计确诊病例数 $J_c(t)$ 、累计治愈出院病例数 $Z(t)$ 和累计死亡病例数

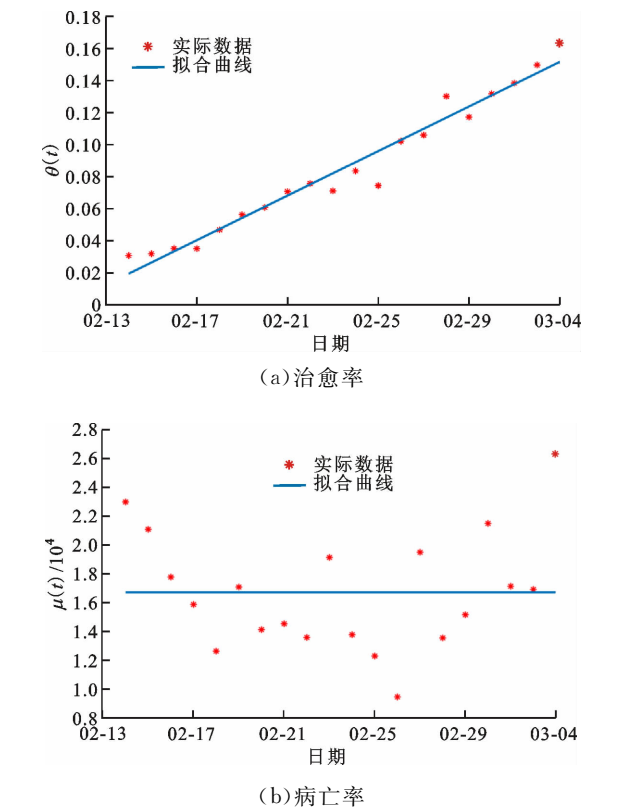


图 5 $\theta(t)$ 和 $\mu(t)$ 的拟合(湖北省除武汉市外其他地区)

Fig.5 Fitting of $\theta(t)$ and $\mu(t)$ (in Hubei except Wuhan)

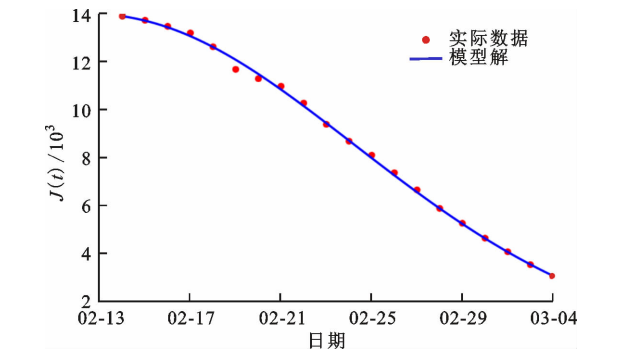


图 6 现有确诊病例数(湖北省除武汉市外其他地区)

Fig.6 Currently confirmed case number (in Hubei except Wuhan)

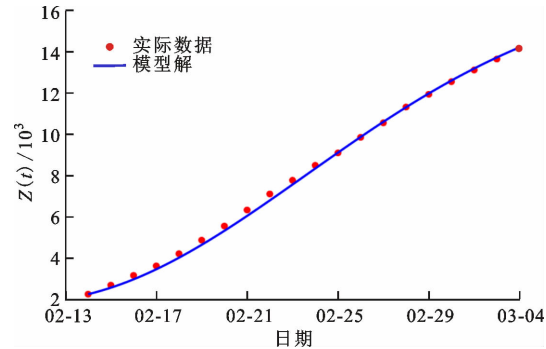
$D(t)$ 的传播动态如图 7 所示,平均相对误差见表 4。

表 5 模型(1)状态初值(湖北省除武汉市外其他地区)

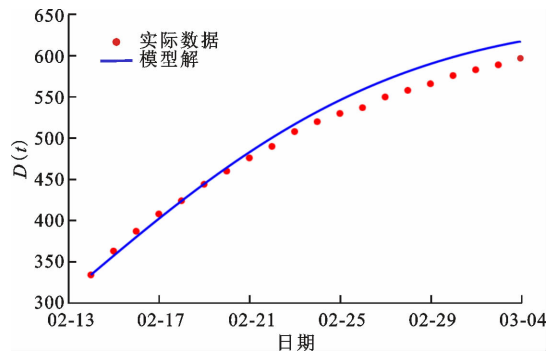
Table 5 Initial state values of model I (in Hubei except Wuhan)

初始状态	取值	来源
$S(0)$	300 000	假设
$E(0)$	392	拟合
$Q(0)$	1 024	拟合
$A(0)$	102	拟合
$I(0)$	51	拟合
$J(0)$	13 886	实际
$R(0)$	3 071	假设
$J_c(0)$	16 492	实际
$Z(0)$	2 272	实际
$D(0)$	334	实际

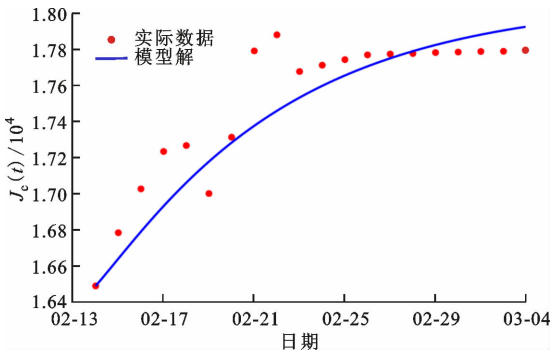
从图 7 和表 4 可以看出,累计治愈出院病例 $Z(t)$ 和累计死亡病例数 $D(t)$ 与实际报告数据较吻合,而从图 7c 可以看出,2 月 23 日以前累计确诊病例实际报告数据波动较大,这主要是因为前期疑似病例较多,而核酸检测能力有限,为了尽快消化疑似病例,卫生部门制定了临床诊断标准来区分确诊病例。后期核酸检测能力充裕了,对这些临床诊断病例再进行核酸检测,非 COVID-19 感染病例就会核减掉。



(a) 累计治愈出院病例数



(b) 累计死亡病例数



(c) 累计确诊病例数

图 7 COVID-19 的实际与模拟传播动态(湖北省除武汉市外其他地区)

Fig. 7 Real and simulated spread dynamics of COVID-19 (in Hubei except Wuhan)

总体上说,模型(1)能真实反映 COVID-19 在湖北省除武汉市外的地区的传播动态。

4 灵敏性分析

为了降低 COVID-19 的传播,需要考虑采取哪些措施最有效,即要分析哪些参数对基本再生数 R_0 的影响最大。这里采用文献[26]中的灵敏度分析方法,计算基本再生数 R_0 对各参数的灵敏性指数。

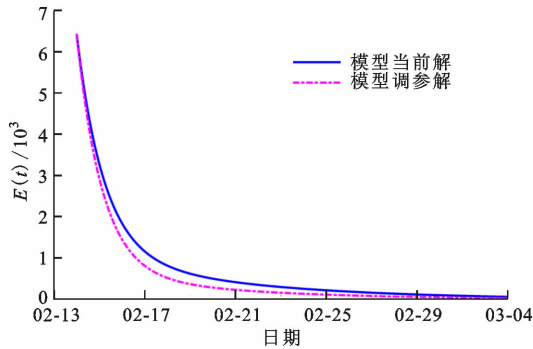
定义^[26]:设函数 Φ 关于变量 x 可偏导,则 Φ 关于 x 的灵敏度指数为

$$\tau_{\Phi}^x = \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{x}{\Phi} \tag{32}$$

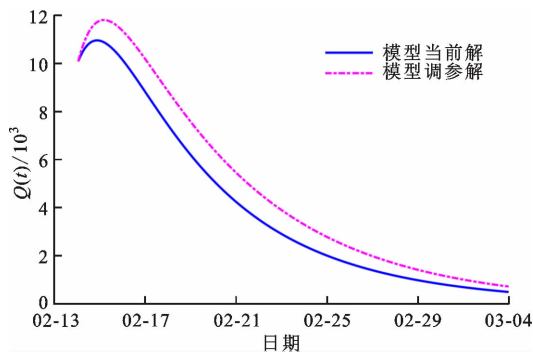
它表示的是当参变量 x 增加 1 个单位时,函数 Φ 增加($\tau_{\Phi}^x > 0$)或减少($\tau_{\Phi}^x < 0$) $|\tau_{\Phi}^x|$ 个单位。 $|\tau_{\Phi}^x|$ 越大,函数 Φ 受变量 x 的影响越大。基本再生数 R_0 对各参数的灵敏性指数计算结果见表 2。例如, R_0 对 β 的灵敏度指数为 0.849 60,这意味着当 β 增加 10%时, R_0 将增加 8.496%; R_0 对 δ_1 的灵敏度指数为 -0.976 73,则表示当 δ_1 增加 10%时, R_0 将减少 9.767 3%。从表 2 可以看出,对 R_0 数值影响较大的参数依次为 u 、 δ_1 、 β 、 δ_3 、 γ_1 、 δ_2 。由此可见,若需继续减小基本再生数 R_0 ,则有效措施包括:戴口罩,尽量减少人与人之间的接触,即减小 u ;加强密切接触者的追踪隔离措施,即继续增大 δ_1 ;减少与有症状感染者的接触率,即减小 β ;加大保障有症状感染者的入院隔离治疗,即增加 γ_1 等。通过灵敏性分析可知其中最有效的措施是减小 u 和增大 δ_1 。这些措施与第 3 节根据 R_0 的表达式分析得出的结论一致。

为了充分说明参数的调整对 OVID-19 播动态的影响,根据上述灵敏性分析,调整部分参数进行仿

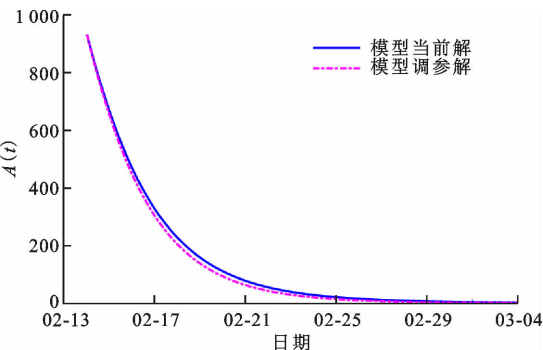
真对比。以武汉市为例,假设防控措施可以更严格一些,即 u 可以更小,取 $u = 0.2$,隔离率 δ_1 由 0.767 18 增加到 0.867 18,其他参数不变,调参前后各状态变化趋势分别如图 3、图 4 和图 8 所示。从图 8 可以看出,调整两个参数的值后,未被发现的暴露者 $E(t)$ 、无症状感染者 $A(t)$ 和有症状感染者 $I(t)$ 的数量比之前有所减少;而隔离观察者 $Q(t)$ (图 8b) 明显变多了,会导致新增确诊病例增加,从而累计确诊病例 $J_c(t)$ 、累计治愈出院病例 $Z(t)$ 和现有确诊病例 $J(t)$ 均有所增加。这些都是希望看到的结果,人们希望所有感染者都能尽快确诊,一旦确诊了就会被隔离治疗,避免了 COVID-19 的进一步传播。这些仿真验证了灵敏度分析的结果。



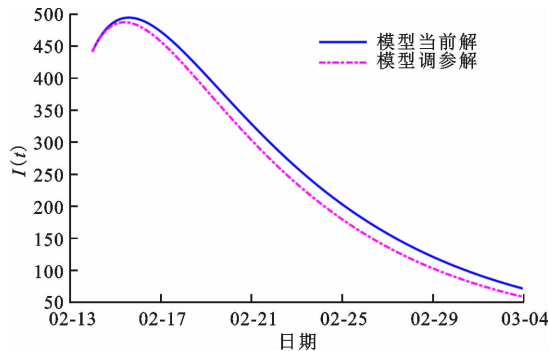
(a) 暴露(潜伏期)人群 $E(t)$



(b) 隔离观察人群 $Q(t)$



(c) 无症状感染者 $A(t)$



(d) 有症状感染人群 $I(t)$

图 8 模型(1)状态变化趋势(武汉市)

Fig. 8 Trends of states of model I (in Wuhan)

5 结 论

距离 COVID-19 首次发现至今已有一年多时间了,然而 COVID-19 在全球范围内仍然处于大流行阶段,而且还出现了传染力更强的变异病毒,这给全球防疫带来挑战。本文建立数学模型模拟 COVID-19 在一些严格防疫措施下的传播,具体工作和结论总结如下:

(1)利用实际报告的有关数据对模型参数进行了拟合,并用模型(1)分别对 COVID-19 在武汉市和湖北省除武汉市外的地区的传播进行了模拟仿真,仿真结果基本与实际数据吻合,说明模型(1)是合理的,能较准确地反映 COVID-19 在严格防控措施下的传播动态;

(2)通过对模型参数的灵敏性分析,给出各参数对 COVID-19 传播影响的排序,其中对 COVID-19 传播影响最大的是 u 和 δ_1 ,对制定相应的防控措施提供了理论依据,仿真也证实了灵敏性分析结果。

通过本文的建模和分析,希望能在制定防疫措施阻止 COVID-19 的传播方面提供一些有益建议。

参考文献:

[1] HUANG Chaolin, WANG Yeming, LI Xingwang, et al. Clinical features of patients infected with 2019 novel coronavirus in Wuhan, China [J]. The Lancet, 2020, 395(10223): 497-506.

[2] COHEN J, NORMILE D. New SARS-like virus in China triggers alarm [J]. Science, 2020, 367(6475): 234-235.

[3] World Health Organization. Coronavirus disease 2019 (COVID-19) situation report: 70[EB/OL]. (2020-03-30) [2021-03-10]. <https://www.who.int/docs/default-source/coronaviruse/situation-reports/20200330->

- sitrep-70-covid-19. pdf? sfvrsn=7e0fe3f8_4.
- [4] MACKENZIE J S, SMITH D W. COVID-19: a novel zoonotic disease caused by a coronavirus from China; what we know and what we don't [J]. *Microbiology Australia*, 2020, 41(1): 45-50.
 - [5] World Health Organization. WHO coronavirus (COVID-19) dashboard[EB/OL]. [2021-03-10]. <https://covid19.who.int/table>.
 - [6] World Health Organization. Weekly epidemiological update; 22 December 2020 [EB/OL]. (2020-12-22) [2021-03-10]. <https://www.who.int/publications/m/item/weekly-epidemiological-update-22-december-2020>.
 - [7] 王刚, 冯云, 马润年. 操作系统病毒时滞传播模型及抑制策略设计 [J]. *西安交通大学学报*, 2021, 55(3): 11-19.
WANG Gang, FENG Yun, MA Runnian. Time-delay propagation model and suppression strategy design of operating system virus [J]. *Journal of Xi'an Jiaotong University*, 2021, 55(3): 11-19.
 - [8] 谢文军, 付晓, 于振华, 等. 信息物理融合系统中恶意软件传播动力学研究 [J]. *西安交通大学学报*, 2015, 49(4): 78-83.
XIE Wenjun, FU Xiao, YU Zhenhua, et al. The spreading dynamics of malicious softwares in cyber-physical system [J]. *Journal of Xi'an Jiaotong University*, 2015, 49(4): 78-83.
 - [9] 史旻, 齐勇, 杨斌侠. 一种基于子网保护的蠕虫传播模型及其应用 [J]. *西安交通大学学报*, 2008, 42(6): 788-790.
SHI Yi, QI Yong, YANG Binxia. Local network based worm propagation model and its application [J]. *Journal of Xi'an Jiaotong University*, 2008, 42(6): 788-790.
 - [10] ALKAHTANI B S T, ALZAID S S. A novel mathematics model of COVID-19 with fractional derivative; stability and numerical analysis [J]. *Chaos, Solitons and Fractals*, 2020, 138: 110006.
 - [11] GARBA S M, LUBUMA J M S, TSANOU B. Modeling the transmission dynamics of the COVID-19 pandemic in South Africa [J]. *Mathematical Biosciences*, 2020, 328: 108441.
 - [12] 曹盛力, 冯沛华, 时朋朋. 修正 SEIR 传染病动力学模型应用于湖北省 2019 冠状病毒病 (COVID-19) 疫情预测和评估 [J]. *浙江大学学报(医学版)*, 2020, 49(2): 178-184.
CAO Shengli, FENG Peihua, SHI Pengpeng. Study on the epidemic development of COVID-19 in Hubei province by a modified SEIR model [J]. *Journal of Zhejiang University(Medical Sciences)*, 2020, 49(2): 178-184.
 - [13] LIU Jijun, WANG Liyan, ZHANG Qiang, et al. The dynamical model for COVID-19 with asymptotic analysis and numerical implementations [J]. *Applied Mathematical Modelling*, 2021, 89: 1965-1982.
 - [14] 白宁, 宋晨玮, 徐瑞. 基于动力学模型的 COVID-19 疫情预测与控制策略研究 [J]. *应用数学学报*, 2020, 43(3): 483-493.
BAI Ning, SONG Chenwei, XU Rui. Predicting the trend and evaluating control strategies of COVID-19 based on a dynamical model [J]. *Acta Mathematicae Applicatae Sinica*, 2020, 43(3): 483-493.
 - [15] WANG Han, XU Kang, LI Zhongyi, et al. Improved epidemic dynamics model and its prediction for COVID-19 in Italy [J]. *Applied Sciences*, 2020, 10(14): 4930.
 - [16] 李丹阳, 姚斌, 杜雷鸣. 基于 SIJRD-系统模型的 COVID-19 流行研究 [J]. *云南师范大学学报(自然科学版)*, 2020, 40(6): 22-28.
LI Danyang, YAO Bin, DU Leiming. Study on the prevalence of COVID-19 based on SIJRD-system model [J]. *Journal of Yunnan Normal University (Natural Sciences Edition)*, 2020, 40(6): 22-28.
 - [17] PAI C, BHASKAR A, RAWOOT V. Investigating the dynamics of COVID-19 pandemic in India under lockdown [J]. *Chaos, Solitons & Fractals*, 2020, 138: 109988.
 - [18] LIN Qianying, ZHAO Shi, GAO Daozhou, et al. A conceptual model for the coronavirus disease 2019 (COVID-19) outbreak in Wuhan, China with individual reaction and governmental action [J]. *International Journal of Infectious Diseases*, 2020, 93: 211-216.
 - [19] 范如国, 王奕博, 罗明, 等. 基于 SEIR 的新冠肺炎传播模型及拐点预测分析 [J]. *电子科技大学学报*, 2020, 49(3): 369-374.
FAN Ruguo, WANG Yibo, LUO Ming, et al. SEIR-based COVID-19 transmission model and inflection point prediction analysis [J]. *Journal of University of Electronic Science and Technology of China*, 2020, 49(3): 369-374.
 - [20] ANNAS S, ISBAR PRATAMA M, RIFANDI M, et al. Stability analysis and numerical simulation of SEIR model for pandemic COVID-19 spread in Indonesia [J]. *Chaos, Solitons & Fractals*, 2020, 139: 110072.
 - [21] COOPER I, MONDAL A, ANTONOPOULOS C G. Dynamic tracking with model-based forecasting for the

- spread of the COVID-19 pandemic [J]. *Chaos, Solitons and Fractals*, 2020, 139: 110298.
- [22] 马知恩, 周义仓, 王稳地, 等. 传染病动力学的数学建模与研究 [M]. 北京: 科学出版社, 2004: 10-20.
- [23] MARTCHEVA M. An introduction to mathematical epidemiology [M]. Berlin, Germany: Springer, 2015: 123-144.
- [24] VAN DEN DRIESSCHE P, WATMOUGH J. Reproduction numbers and sub-threshold endemic equilibria for compartmental models of disease transmission [J]. *Mathematical Biosciences*, 2002, 180(1/2): 29-48.
- [25] 中华人民共和国国家卫生健康委员会: 新型冠状病毒肺炎疫情防控: 疫情通报[EB/OL]. [2021-03-10]. http://www.nhc.gov.cn/xcs/yqtb/list_gzbd.shtml.
- [26] CHITNIS N, HYMAN J M, CUSHING J M. Determining important parameters in the spread of malaria through the sensitivity analysis of a mathematical model [J]. *Bulletin of Mathematical Biology*, 2008, 70(5): 1272.

[本刊相关文献链接]

- 张思宁, 王刚, 马润年, 伍维甲, 严丽娜. 采用双异质群体演化博弈的网络安全防御决策方法[J]. *西安交通大学学报*, 2021, 55(9): 178-188. doi:10.7652/xjtuxb202109020.
- 王刚, 冯云, 伍维甲, 马润年. 采用可交互信任值机制的病毒传播抑制策略[J]. *西安交通大学学报*, 2021, 55(7): 41-51. doi:10.7652/xjtuxb202107005.
- 王刚, 冯云, 马润年. 操作系统病毒时滞传播模型及抑制策略设计[J]. *西安交通大学学报*, 2021, 55(3): 11-19. doi:10.7652/xjtuxb202103002.

- 秦涛, 王熙凤, 沈壮, 陈周国, 丁建伟. 面向网络舆情的无监督演化趋势评估方法[J]. *西安交通大学学报*, 2020, 54(11): 119-126. doi:10.7652/xjtuxb202011014.
- 袁国强, 李颖晖, 徐浩军, 郑无计. 结冰对飞机本体纵向非线性动力学稳定域的影响[J]. *西安交通大学学报*, 2017, 51(9): 153-158. doi:10.7652/xjtuxb201709022.
- 周亚东, 刘丽丽, 张贝贝, 雷蕾. 在线社会网络中多话题竞态传播分析与建模[J]. *西安交通大学学报*, 2017, 51(2): 1-5, 39. doi:10.7652/xjtuxb201702001.
- 杨迎辉, 李建华, 沈迪, 南明莉, 崔琼. 多重边融合复杂网络动态演化模型[J]. *西安交通大学学报*, 2016, 50(9): 132-139. doi:10.7652/xjtuxb201609021.
- 王菲菲, 杨扬, 蒋飞, 许进. 面向用户话题相似性特征的链路预测方法[J]. *西安交通大学学报*, 2016, 50(8): 103-109. doi:10.7652/xjtuxb201608017.
- 刘兆丽, 秦涛, 管晓宏, 赵丹, 杨涛. 采用用户名相似度传播模型的线上用户身份属性关联方法[J]. *西安交通大学学报*, 2016, 50(4): 1-6. doi:10.7652/xjtuxb201604001.
- 孙立远, 周亚东, 管晓宏. 利用信息传播特性的中文网络新词发现方法[J]. *西安交通大学学报*, 2015, 49(12): 64-69. doi:10.7652/xjtuxb201512010.
- 孟宪佳, 马建峰, 王一川, 卢笛. 面向社交网络中多背景的信任评估模型[J]. *西安交通大学学报*, 2015, 49(4): 73-77. doi:10.7652/xjtuxb201504012.
- 谢文军, 付晓, 于振华, 韩林. 信息物理融合系统中恶意软件传播动力学研究[J]. *西安交通大学学报*, 2015, 49(4): 78-83. doi:10.7652/xjtuxb201504013.
- 张赛, 徐恪, 李海涛. 微博类社交网络中信息传播的测量与分析[J]. *西安交通大学学报*, 2013, 47(2): 130-136. doi:10.7652/xjtuxb201302021.

(编辑 武红江)