

利用复变格林函数法的 Eshelby 夹杂 外场的一般显式解析解

李瑞¹, 唐智亿¹, 苏飞¹, 范文², 马利锋¹

(1. 西安交通大学机械结构强度与振动国家重点实验室, 710049, 西安;

2. 长安大学地质工程与测绘学院, 710064, 西安)

摘要: 针对目前仍然没有文献给出椭圆异性夹杂外场的完全显式解析表达的情况, 通过重新研究二维 Eshelby 椭圆异性夹杂问题, 得到了具有均匀特征应变分布的 Eshelby 椭圆异性夹杂在远场载荷作用下内外场的一般显式解析解。此外, 重新研究了经典的 Inglis 椭圆孔问题, 得到了其在直角坐标系下的显式解析解。首先利用等效特征应变原理求解了具有均匀特征应变分布和远场载荷作用的椭圆异性夹杂内的应力分布, 然后在平面弹性力学框架下, 利用复变格林函数法描述了 Eshelby 椭圆异性夹杂模型, 给出了远场载荷下具有均匀特征应变分布的 Eshelby 椭圆异性夹杂外部场的一般显式解析解, 最后探讨了它在液体夹杂问题中的应用, 结果表明: 内部压力和远场载荷均会导致基体长轴两端端点附近应力高度集中; 液体夹杂的存在会减小系统的剪切模量。本文得到的 Eshelby 椭圆异性夹杂问题的一般解析解更简便, 而且其在液体夹杂问题中的研究结果能够解释土体液化的微观机理及液体夹杂对土体滑坡的影响。相比较曲线坐标系下的 Inglis 解, 本文得到的直角坐标系下的 Inglis 解是一种通用形式, 更简洁。

关键词: 一般显式解析解; Eshelby 椭圆异性夹杂; 液体夹杂; 复变格林函数法;
等效特征应变原理

中图分类号: O343.1 **文献标志码:** A

DOI: 10.7652/xjtuxb202207020 **文章编号:** 0253-987X(2022)07-0184-13



OSID 码

Generic Explicit Analytical Solution for Exterior Field of Eshelby's Inclusion in Plane Elasticity Based on Green's Function

LI Rui¹, TANG Zhiyi¹, SU Fei¹, FAN Wen², MA Lifeng¹

(1. State Key Laboratory for Strength and Vibration of Mechanical Structures, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China; 2. College of Geological Engineering and Geomatics, Chang'an University, Xi'an 710064, China)

Abstract: At present, there is still no literature giving a generic explicit analytical solution for the exterior field of elliptical inhomogeneous inclusions. In this paper, the generic explicit analytical solutions for both interior and exterior fields of Eshelby's elliptical inhomogeneous inclusion, with uniform eigenstrain distribution and subjected to far-field loading, are obtained. Additionally, the generic solution applying to the well-known Inglis's elliptical hole problem is investigated, and the analytical solution in rectangular coordinate system is obtained in a new form. By virtue of the equivalent eigenstrain principle, Eshelby's elliptical inhomogeneous inclusion model is formulated with complex variable Green's function method in the framework of

收稿日期: 2022-02-13。 作者简介: 李瑞(1992—), 女, 硕士生; 马利锋(通信作者), 男, 教授, 博士生导师。 基金项目: 国家自然科学基金资助项目(41630634, 12072254)。

网络出版时间: 2022-04-13

网络出版地址: <http://kns.cnki.net/kcms/detail/61.1069.T.20220411.1114.004.html>

plane elasticity. The generic explicit analytical solution for Eshelby’s elliptical inhomogeneous inclusion with uniform eigenstrain distribution and subjected to far-field loading is obtained. Its application to liquid inclusion problems is particularly explored, and some existing issues in this topic are clarified. The results show that (i) both interior pressure and far-field loading would lead drastically stress concentration in the vicinity of the endpoints of the major axis; (ii) the presence of liquid inclusion may soften the shear modulus of the composite systems. The generic explicit analytical solution for Eshelby’s elliptical inhomogeneous inclusion problems obtained in this study provides a concise and convenient form for application, and its research results in the liquid inclusion problem can explain the microscopic mechanism of soil liquefaction and the influence of liquid inclusions on soil landslides. In addition, compared with the Inglis’s solution within curvilinear coordinate system, the solution in rectangular coordinates is generic and compact.

Keywords: generic explicit analytical solution; Eshelby’s elliptical inhomogeneous inclusion; liquid inclusion; complex variable Green’s function method; equivalent eigenstrain principle

图 1 所示椭圆异性夹杂模型中一个异性夹杂体嵌入在无限大弹性基体内,夹杂体内分布着非弹性应变 ϵ_{ij}^* (称为特征应变),远场荷载 σ^∞ 作用于无穷远处,其中 1 号和 2 号分别代表基体材料和夹杂材料,夹杂区域用 D 表示。求解这种在给定的特征应变场分布和远场载荷作用下所产生的夹杂内部和外部弹性场被称为经典异性夹杂问题^[1]。当夹杂物与基体的弹性性能相同时,此问题退化为同性夹杂问题。异性夹杂问题在材料工程、土木工程、机械工程等不同学科中有着非常广泛的应用,它已经成为固体力学研究的主题之一^[1-6]。关于这项研究的文献已有数千篇,例如 Mura 等^[5-6]、Chen 等^[7]、Zhou 等^[8]的综述论文,Christensen^[9]、Mura^[1]的专著等。

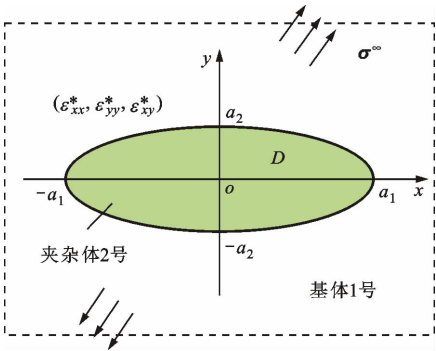


图 1 椭圆异性夹杂

Fig. 1 An elliptical inhomogeneous inclusion

对于异性夹杂问题,Eshelby 等^[2-3]开创性地证明了当异性夹杂为椭球且夹杂内的特征应变分布均匀时,其内部应变场必均匀,这个标志性结果概括了早期关于椭圆异性夹杂的努力^[10-11]。Eshelby 的这

一成果可用经典的四阶 Eshelby 张量来表述,这为系统地研究弹性固体中的夹杂问题奠定了基础^[12]。该椭圆异性夹杂模型及其相关模型通常被称为 Eshelby 夹杂力学模型,它已成为固体力学的经典成果之一。与 Eshelby 夹杂的内场解相比,虽然前人对基体的弹性场也做了大量的工作,但是研究并不深入^[3,13]。

实际上,外场的显式解析表达仍然是 Eshelby 夹杂力学中未完善解决的理论问题之一。例如,由于含有液体夹杂的弹性复杂模型可广泛用于岩石、土体中微观应力分析,因此在 Eshelby 夹杂力学框架下,求解液体夹杂外场成为一个主要问题^[14-16]。尽管该问题已引起诸多学者的关注,但是有关外场的显式解析解的研究仍然很少。

与三维 Eshelby 夹杂模型相比,二维 Eshelby 夹杂模型简单又具有普遍性,同时仍能有效反映夹杂内外的基本变形行为。此外,二维模型便于引入更多的数学工具来分析外场,因此,本研究就着手探讨平面椭圆异性夹杂问题。

处理平面椭圆异性夹杂问题主要有两种方法:①Koloso-Muskhelishvili 复势法^[17],利用保角映射方法,外场解可表示为边界积分形式,然后外场进一步表示为 Muskhelishvili 复势的无限 Laurent 级数展开式^[16];②外场的 Eshelby 张量法^[13],利用了 Eshelby 等效夹杂法和内场的 Eshelby 张量的概念^[2]。

复势法是解决二维 Eshelby 夹杂问题的有效方法,但是复势的保角映射方法和 Laurent 级数展开

在实际应用中会得到渐近解或近似解。外场的 Eshelby 张量公式可以用闭合解形式表达^[13],但是由于内部场的 Eshelby 张量表达式实际上是格林函数法中总应变卷积公式的特解^[1],要把这些公式推广到外场,将会很复杂。因此,目前还没有二维 Eshelby 椭圆夹杂外部变形场的完全显式解析表达。

这就促使我们寻求一种解决二维椭圆异性夹杂外场问题的新方法。格林函数法在求解多种同性夹杂问题时既方便又直观^[1,18],首先将无限平面固体中点状特征应变的复势解作为影响函数,通过格林函数法求出同性夹杂问题的复势。如果是异性夹杂,可进一步利用等效特征应变原理^[19],将平面椭圆异性夹杂问题转化为相应的同性夹杂,再利用这些方法和已有的解,得到异性夹杂问题的复势^[18,20],从而得到夹杂系统的显式解析解。

本研究目的是得到二维 Eshelby 椭圆夹杂外场的一般显式解析解,详细地揭示夹杂体内外弹性场的分布规律,为其在相关学科中的应用提供便利。首先利用等效特征应变原理求解具有均匀特征应变分布和远场载荷作用的椭圆异性夹杂内部场的应力分布,然后用复变格林函数法推导椭圆夹杂外部场的复势,最后进一步推导椭圆夹杂外部场的力学解。作为应用,分别研究受内压作用的液体夹杂和受远场纯剪切载荷作用的液体夹杂问题,以期解释土体液化的微观机理及液体夹杂对土体滑坡的影响。此外,对经典的 Inglis 椭圆孔问题^[10]进行了分析,推导了其显式解析解,进一步证明本文所得一般显式解析解的优势。

1 具有均匀特征应变分布和远场载荷作用的椭圆异性夹杂

本节首先给出了具有均匀特征应变分布的椭球同性夹杂内部场的显式表达式及 Eshelby 张量,然后利用等效特征应变原理求解相应的椭圆异性夹杂问题,得到了椭圆异性夹杂的一般解。

1.1 具有均匀特征应变分布的椭球同性夹杂和 Eshelby 张量

对于如图 2 所示具有特定的均匀特征应变分布的椭球同性夹杂,根据 Eshelby 的结果^[2],内部场的总应变可以表示为^[1]

$$\epsilon_{ij} = S_{ijkl}\epsilon_{kl}^0 \text{ 或 } \boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{S}\boldsymbol{\epsilon}^0, \quad \mathbf{x} \in D \quad (1)$$

式中: ϵ_{ij} 和 ϵ_{kl}^0 分别为总应变和特征应变;Eshelby 张量 S_{ijkl} 满足 $S_{ijkl} = S_{jikl} = S_{ijlk}$;位置坐标 $\mathbf{x} = x_j \mathbf{i}_j$ 。

图 2 中 ϵ_{ij}^0 为均匀特征应变, a_1 、 a_2 、 a_3 为半主

轴,夹杂区域用 D 表示。

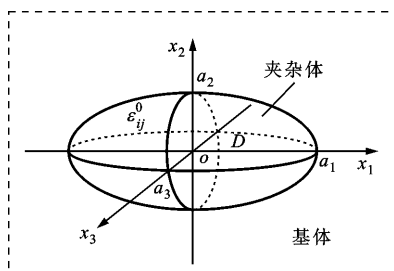


图 2 具有特定均匀特征应变分布的椭球同性夹杂

Fig. 2 An ellipsoidal homogeneous inclusion

令半轴长度 a_3 趋于无穷大,经过复杂计算(参见附录 A),得到式(1)的矩阵形式为

$$\begin{bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ \epsilon_{23} \\ \epsilon_{31} \\ \epsilon_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{1111} & S_{1122} & S_{1133} & 0 & 0 & 0 \\ S_{2211} & S_{2222} & S_{2233} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2S_{2323} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2S_{3131} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2S_{1212} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_{11}^0 \\ \epsilon_{22}^0 \\ \epsilon_{33}^0 \\ \epsilon_{23}^0 \\ \epsilon_{31}^0 \\ \epsilon_{12}^0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{x} \in D \quad (2)$$

式中:张量 S_{ijkl} 为

$$\begin{cases} S_{1111} = \frac{1}{2(1-\nu)} \left[\frac{a_2^2 + 2a_1a_2}{(a_1 + a_2)^2} + \frac{(1-2\nu)a_2}{(a_1 + a_2)} \right] \\ S_{2222} = \frac{1}{2(1-\nu)} \left[\frac{a_1^2 + 2a_1a_2}{(a_1 + a_2)^2} + \frac{(1-2\nu)a_1}{(a_1 + a_2)} \right] \\ S_{1122} = \frac{1}{2(1-\nu)} \left[\frac{a_2^2}{(a_1 + a_2)^2} - \frac{(1-2\nu)a_2}{(a_1 + a_2)} \right] \\ S_{2211} = \frac{1}{2(1-\nu)} \left[\frac{a_1^2}{(a_1 + a_2)^2} - \frac{(1-2\nu)a_1}{(a_1 + a_2)} \right] \\ S_{1212} = \frac{1}{2(1-\nu)} \left[\frac{a_1^2 + a_2^2}{2(a_1 + a_2)^2} + \frac{(1-2\nu)}{2} \right] \\ S_{1133} = \frac{1}{2(1-\nu)} \frac{2\nu a_2}{(a_1 + a_2)}, \quad S_{3131} = \frac{1}{2} \frac{a_2}{(a_1 + a_2)} \\ S_{2233} = \frac{1}{2(1-\nu)} \frac{2\nu a_1}{(a_1 + a_2)}, \quad S_{2323} = \frac{1}{2} \frac{a_1}{(a_1 + a_2)} \end{cases} \quad (3)$$

式(2)的 Eshelby 张量的表达式可用于解决平面问题。

1.2 椭圆异性夹杂内部场的解

为了求解具有均匀特征应变分布的椭球异性夹杂问题,Eshelby^[2]提出等效夹杂法,该方法证明了椭球异性夹杂问题可转化为椭球同性夹杂问题,如图 3 所示,后者适用于均匀材料,很容易解决。针对非椭球状夹杂和含非均匀特征应变分布的异性夹杂问题,Ma 和 Korsunsky^[19]提出了基于虚功原理的等效特征应变原理,该原理能够解决具有任意非均

匀特征应变分布的任意形状夹杂问题。

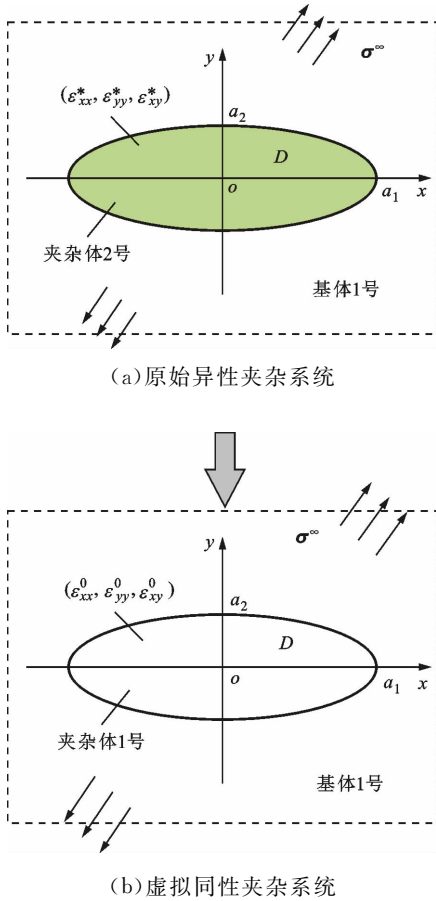


图3 椭圆异性夹杂转换为椭圆同性夹杂

Fig. 3 The transform from elliptical inhomogeneous inclusion to elliptical homogeneous inclusion

根据等效特征应变原理^[19],可以将如图3(a)所示的具有均匀特征应变分布和远场载荷作用的椭圆异性夹杂问题,转化为如图3(b)所示的同性夹杂问题。这一原理要求图3(a)和图3(b)中的夹杂内部应力场和总应变场相同,由此可得异性夹杂-同性夹杂的变换方程为

$$C^*(\boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\varepsilon}^\infty - \boldsymbol{\varepsilon}^*) = C(\boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\varepsilon}^\infty - \boldsymbol{\varepsilon}^0), \quad \boldsymbol{x} \in D \quad (4)$$

式中: C^* 和 C 分别为异性夹杂材料和基体材料的弹性常数; $\boldsymbol{\varepsilon}^*$ 为异性夹杂内部分布的真实特征应变; $\boldsymbol{\varepsilon}^0$ 为虚拟同性夹杂内的等效特征应变; $\boldsymbol{\varepsilon}^\infty$ 为远场载荷且满足 $\boldsymbol{\varepsilon}^\infty = C^{-1}\boldsymbol{\sigma}^\infty$; $\boldsymbol{\varepsilon}$ 为虚拟同性夹杂内的总应变。

需要注意的是,式(4)适用于任意几何形状的夹杂,而不仅仅局限于椭球形夹杂,总应变 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 可以用卷积分式表示为^[1]

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{x}) = \int_D \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0) \boldsymbol{\varepsilon}^0(\boldsymbol{x}_0) d\boldsymbol{x}_0 \quad (5)$$

式中: $\boldsymbol{g}$ 表示格林函数(或影响函数),积分域为夹杂区域 D 。

对于各向同性材料

$$\begin{cases} C_{ijml} = \lambda \delta_{ij} \delta_{ml} + \mu (\delta_{im} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jm}), & \boldsymbol{x} \notin D \\ C_{ijml}^* = \lambda_1 \delta_{ij} \delta_{ml} + \mu_1 (\delta_{im} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jm}), & \boldsymbol{x} \in D \end{cases} \quad (6)$$

式中: $\lambda, \mu, \lambda_1, \mu_1$ 分别为基体和夹杂的拉梅常数。

式(4)中的矩阵可表示为

$$\begin{cases} C = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mu \end{bmatrix} \\ \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} \\ \varepsilon_{12} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\varepsilon}^0 = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11}^0 \\ \varepsilon_{22}^0 \\ \varepsilon_{33}^0 \\ \varepsilon_{23}^0 \\ \varepsilon_{31}^0 \\ \varepsilon_{12}^0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\varepsilon}^\infty = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11}^\infty \\ \varepsilon_{22}^\infty \\ \varepsilon_{33}^\infty \\ \varepsilon_{23}^\infty \\ \varepsilon_{31}^\infty \\ \varepsilon_{12}^\infty \end{bmatrix} \\ C^* = \begin{bmatrix} \lambda_1 + 2\mu_1 & \lambda_1 & \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_1 & \lambda_1 + 2\mu_1 & \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_1 & \lambda_1 & \lambda_1 + 2\mu_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\mu_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mu_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mu_1 \end{bmatrix} \\ \boldsymbol{\varepsilon}^* = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11}^* \\ \varepsilon_{22}^* \\ \varepsilon_{33}^* \\ \varepsilon_{23}^* \\ \varepsilon_{31}^* \\ \varepsilon_{12}^* \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\sigma}^\infty = \begin{bmatrix} \sigma_{11}^\infty \\ \sigma_{22}^\infty \\ \sigma_{33}^\infty \\ \sigma_{23}^\infty \\ \sigma_{31}^\infty \\ \sigma_{12}^\infty \end{bmatrix} \end{cases} \quad (7)$$

对于含均匀特征应变分布的椭圆异性夹杂,式(5)可简化为式(1),则等效特征应变可由式(4)直接求出

$$\boldsymbol{\varepsilon}^0 = [C - (C - C^*)S]^{-1} [(C - C^*)\boldsymbol{\varepsilon}^\infty + C^* \boldsymbol{\varepsilon}^*] \quad \boldsymbol{x} \in D \quad (8)$$

或者

$$\boldsymbol{\varepsilon}^0 = [C - (C - C^*)S]^{-1} [(C - C^*)C^{-1}\boldsymbol{\sigma}^\infty + C^* \boldsymbol{\varepsilon}^*] \quad \boldsymbol{x} \in D \quad (9)$$

显然,此时得到的等效特征应变也是均匀的。

通过式(1)和式(9),夹杂内部应力场可表示为

$$\boldsymbol{\sigma} = C(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^0) + \boldsymbol{\sigma}^\infty = C(S - I)[C - (C - C^*)S]^{-1} [(C - C^*)C^{-1}\boldsymbol{\sigma}^\infty + C^* \boldsymbol{\varepsilon}^*] + \boldsymbol{\sigma}^\infty \quad \boldsymbol{x} \in D \quad (10)$$

夹杂外部应力场为

$$\sigma = C\varepsilon + \sigma^\infty, \quad x \notin D \quad (11)$$

式(11)只是一个形式解,其主要问题是如何求出应变 ε 的表达式。

在本节中,利用等效特征应变原理,将异性夹杂问题转化为相应的同性夹杂问题,得到具有均匀特征应变分布和远场载荷作用的椭圆异性夹杂的内部应力场表达式(10)。得到的等效特征应变表达式(9)将在下一节求解夹杂的外场时起关键作用。

2 Eshelby 椭圆夹杂外部场的解

作为本文研究的核心,在这一节中,给出了位于无限平面固体中的点状特征应变的基本解,然后将其作为影响函数用格林函数法求解同性夹杂问题,导出了夹杂外部场的通解。

2.1 平面弹性体的 Kolosov-Muskhelishvili 复势公式

在平面弹性体复势公式^[17]中,应力和位移的所有分量分别用两个势函数 $\Phi(z)$ 和 $\Omega(z)$ 表示

$$\begin{cases} \sigma_{11} + \sigma_{22} = 2[\Phi(z) + \bar{\Phi}(z)] \\ \sigma_{22} + i\sigma_{12} = \bar{\Phi}(z) + \Omega(z) - (z - \bar{z})\Phi'(z) \\ 2\mu(u_{1,1} + iu_{2,1}) = \kappa\Phi(z) - \bar{\Omega}(z) - (z - \bar{z})\bar{\Phi}'(z) \end{cases} \quad (12)$$

式中: $i = \sqrt{-1}$; $z = x_1 + ix_2$ (或 $z = x + iy$); $\Phi(z) = \varphi'(z)$; $\Omega(z) = [z\varphi'(z) + \psi(z)]'$; $\Phi'(z) = \frac{d\Phi(z)}{dz}$; μ 为剪切模量;平面应变 $\kappa = 3 - 4\nu$, 平面应力 $\kappa = (3 - \nu)/(1 + \nu)$, ν 为泊松比; $u_{j,i}$ 中的下标 i 表示关于 x_i 的微分; $\bar{\Phi}(z)$ 、 $\bar{\Omega}(z)$ 、 $\bar{\Phi}'(z)$ 分别表示 $\Phi(z)$ 、 $\Omega(z)$ 、 $\Phi'(z)$ 的共轭。

无限平面固体中位于 s 处的点状特征应变如图 4 所示,在 xoy 坐标中,无限平面体中 s 处的点状特征应变的势函数可用 $(\varepsilon_{11}^0, \varepsilon_{22}^0, \varepsilon_{12}^0)$ 表示^[18,20]

$$\begin{cases} \Phi_s(z) = \frac{\mu[(\varepsilon_{22}^0 - \varepsilon_{11}^0) - i2\varepsilon_{12}^0]}{\pi(1 + \kappa)(z - s)^2} \\ \Omega_s(z) = \frac{\mu\{2(\varepsilon_{11}^0 + \varepsilon_{22}^0) - [(\varepsilon_{22}^0 - \varepsilon_{11}^0) - i2\varepsilon_{12}^0]\}}{\pi(1 + \kappa)(z - s)^2} + \frac{2\mu[(\varepsilon_{22}^0 - \varepsilon_{11}^0) - i2\varepsilon_{12}^0]}{\pi(1 + \kappa)} \frac{\bar{s} - s}{(z - s)^3} \end{cases} \quad (13)$$

式中: ε_{ij}^0 为点 s 处的特征应变。

2.2 基于复变格林函数法的椭圆夹杂的复势

在图 3(b)中,夹杂的等效特征应变和远场载荷会引起弹性变形。由于线弹性变形遵循叠加原理,因此同性夹杂中等效特征应变引起的应力势可通过

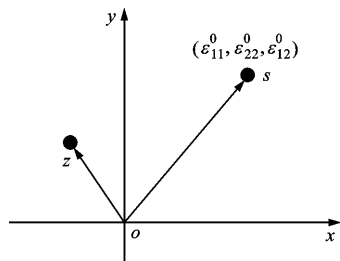


图 4 无限平面固体中位于 s 处的点状特征应变

Fig. 4 A point-wise eigenstrain located at s in an infinite plane solid

复变格林函数法得到,其影响函数为式(13)。即通过对夹杂域 D 上的变量 $s = x_s + iy_s$ 进行积分,可得到由等效特征应变引起的夹杂外场的解

$$\begin{cases} \Phi_E(z) = \int_D \Phi_s(z, s) dD = \iint_D \Phi_s(z, x_s + iy_s) dx_s dy_s \\ \Omega_E(z) = \int_D \Omega_s(z, s) dD = \iint_D \Omega_s(z, x_s + iy_s) dx_s dy_s \end{cases} \quad z \notin D \quad (14)$$

其中 $\Phi_s(z, s)$ 和 $\Omega_s(z, s)$ 即式(13)中的 $\Phi_s(z)$ 和 $\Omega_s(z)$ 。

将式(13)代入式(14),再结合等效特征应变式(8)或式(9),可将式(14)转化为

$$\begin{cases} \Phi_E(z) = \frac{\mu[(\varepsilon_{22}^0 - \varepsilon_{11}^0) - i2\varepsilon_{12}^0]}{\pi(1 + \kappa)} \iint_D \frac{dx_s dy_s}{(z - s)^2} \\ \Omega_E(z) = \frac{\mu\{2(\varepsilon_{11}^0 + \varepsilon_{22}^0) - [(\varepsilon_{22}^0 - \varepsilon_{11}^0) - i2\varepsilon_{12}^0]\}}{\pi(1 + \kappa)} \cdot \iint_D \frac{dx_s dy_s}{(z - s)^2} + \frac{2\mu[(\varepsilon_{22}^0 - \varepsilon_{11}^0) - i2\varepsilon_{12}^0]}{\pi(1 + \kappa)} \cdot \iint_D \frac{\bar{s} - s}{(z - s)^3} dx_s dy_s \end{cases} \quad z \notin D \quad (15)$$

由于积分域为椭圆区域,式(15)中的积分可表示为

$$\begin{cases} \iint_D \frac{dx_s dy_s}{(z - s)^2} = \int_0^1 r dr \int_0^{2\pi} \frac{a_1 a_2 d\theta}{[z - r(a_1 \cos\theta + ia_2 \sin\theta)]^2} = \frac{2\pi a_1 a_2}{a_1^2 - a_2^2} \left(\frac{z}{a_1 + z} \sqrt{\frac{(a_1 + z)^2}{z^2 - a_1^2 + a_2^2}} - 1 \right) \\ \iint_D \frac{\bar{s} - s}{(z - s)^3} dx_s dy_s = -2ia_1 a_2^2 \int_0^1 r^2 dr \int_0^{2\pi} \frac{\sin\theta d\theta}{[z - r(a_1 \cos\theta + ia_2 \sin\theta)]^3} = \frac{2\pi a_1 a_2^3}{(a_1^2 - a_2^2)^2} \left[2 + \frac{z(a_1 + z)(3a_1^2 - 3a_2^2 - 2z^2)}{(z^2 - a_1^2 + a_2^2)^2} \cdot \sqrt{\frac{z^2 - a_1^2 + a_2^2}{(a_1 + z)^2}} \right] \end{cases}$$

$$z \notin D$$

(16)

此时式(15)转化为

$$\left\{ \begin{aligned} \Phi_E(z) &= \frac{2\mu[(\epsilon_{22}^0 - \epsilon_{11}^0) - i2\epsilon_{12}^0]}{(1+\kappa)(a_1^2 - a_2^2)} a_1 a_2 \cdot \\ &\quad \left(\frac{z}{a_1 + z} \sqrt{\frac{(a_1 + z)^2}{z^2 - a_1^2 + a_2^2}} - 1 \right) \\ \Omega_E(z) &= \frac{2\mu\{2(\epsilon_{11}^0 + \epsilon_{22}^0) - [(\epsilon_{22}^0 - \epsilon_{11}^0) - i2\epsilon_{12}^0]\}}{(1+\kappa)(a_1^2 - a_2^2)} \cdot \\ &\quad a_1 a_2 \left(\frac{z}{a_1 + z} \sqrt{\frac{(a_1 + z)^2}{z^2 - a_1^2 + a_2^2}} - 1 \right) + \\ &\quad \frac{4\mu[(\epsilon_{22}^0 - \epsilon_{11}^0) - i2\epsilon_{12}^0]}{(1+\kappa)(a_1^2 - a_2^2)^2} a_1 a_2^3 \cdot \\ &\quad \left[2 + \frac{z(a_1 + z)(3a_1^2 - 3a_2^2 - 2z^2)}{(z^2 - a_1^2 + a_2^2)^2} \sqrt{\frac{z^2 - a_1^2 + a_2^2}{(a_1 + z)^2}} \right] \end{aligned} \right.$$

$$z \notin D$$

(17)

该结果适用于椭圆夹杂($a_2 \neq a_1$),圆形夹杂的解可通过令式(17)中 a_2 趋于 a_1 得到

$$\left\{ \begin{aligned} \Phi_E(z) &= \frac{\mu[(\epsilon_{22}^0 - \epsilon_{11}^0) - i2\epsilon_{12}^0]}{1+\kappa} \frac{a_1^2}{z^2} \\ \Omega_E(z) &= \frac{\mu\{2(\epsilon_{11}^0 + \epsilon_{22}^0) - [(\epsilon_{22}^0 - \epsilon_{11}^0) - i2\epsilon_{12}^0]\}}{1+\kappa} \cdot \\ &\quad \frac{a_1^2}{z^2} + \frac{3\mu[(\epsilon_{22}^0 - \epsilon_{11}^0) - i2\epsilon_{12}^0]}{1+\kappa} \frac{a_1^4}{z^4} \end{aligned} \right.$$

$$z \notin D$$

(18)

将式(17)代入式(12),得到图 3(b)中由等效特征应变引起的基体应力场,将式(17)计算的应力解与远场荷载相加,可得到外场的总应力解。式(17)是本研究获得的主要结果之一。

需要强调的是式(17)适用于夹杂物为线性连续介质,无论固体或液体。对于液体夹杂,只需让第一拉梅常数,即式(7)中的剪切模量 μ_1 趋于 0,第二拉梅常数 λ_1 转换为液体的体积模量 K_1 ($K_1 = \lambda_1$),因此,压力与体积应变的关系仅由一个参数决定,不需要额外的假设^[14-16]。此外,已有文献中的方法难以解决既承受压力又承受远场载荷的情况,而本节和第 1 节的公式可解决各种组合荷载条件下的问题。这种处理方法同时适用于固体夹杂和液体夹杂问题。

从计算过程可以看出,这种方法比之前提到的其他方法简便得多。在第 3 节中,将通过两种典型的液体夹杂情况进一步说明其优点,同时展示如何用本节中的解来处理具体问题。

3 加压椭圆液体夹杂的解

嵌于无限大弹性体中的加压椭圆液体夹杂模型

的应用也很广泛,例如松散土体中的内部孔隙、嵌入页岩中的油或气穴。嵌于无限大平面固体中的加压椭圆液体夹杂模型如图 5 所示,针对嵌于无限平面固体中的加压椭圆液体夹杂,主要研究夹杂物周围的应力场,其典型背景包括水力压裂工程^[21-22]和土体液化。

图 5 中液体夹杂内部压力为 p_0 ,夹杂区域用 D 表示。

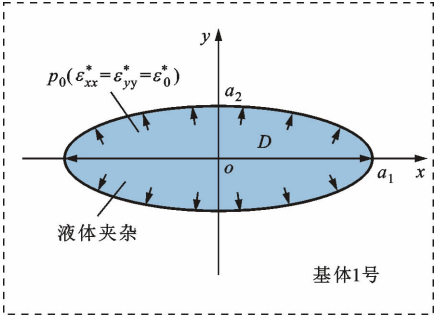


图 5 嵌于无限大平面固体中的加压椭圆液体夹杂模型
Fig. 5 A pressured elliptical liquid inclusion embedded in an infinitely extended plane solid

对于给定内部压力载荷的液体夹杂,通过令 $\mu_1 = 0, \epsilon_{ij}^* = \delta_{ij} \epsilon_0^*, \sigma^{\infty} = 0$,式(7)转化为

$$\left\{ \begin{aligned} \mathbf{C} &= \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mu \end{bmatrix} \\ \boldsymbol{\epsilon} = \begin{bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ \epsilon_{23} \\ \epsilon_{31} \\ \epsilon_{12} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\epsilon}^0 = \begin{bmatrix} \epsilon_{11}^0 \\ \epsilon_{22}^0 \\ \epsilon_{33}^0 \\ \epsilon_{23}^0 \\ \epsilon_{31}^0 \\ \epsilon_{12}^0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{C}^* = \lambda_1 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\epsilon}^* = \epsilon_0^* \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \boldsymbol{\sigma}^{\infty} = \mathbf{C}\boldsymbol{\epsilon}^{\infty} = \mathbf{0} \end{aligned} \right.$$

(19)

然后,利用式(19),由式(9)求得等效特征应变表达式为

$$\left\{ \begin{aligned} \epsilon_{11}^0 &= \frac{3a_2\epsilon_0^*\lambda_1[a_2(\lambda+2\mu)(3\lambda+2\mu)-a_1\lambda\mu]}{(3\lambda+2\mu)[2a_1a_2\mu(\lambda-\lambda_1+\mu)+(a_1^2+a_2^2)\lambda_1(\lambda+2\mu)]} \\ \epsilon_{22}^0 &= \frac{3a_1\epsilon_0^*\lambda_1[a_1(\lambda+2\mu)(3\lambda+2\mu)-a_2\lambda\mu]}{(3\lambda+2\mu)[2a_1a_2\mu(\lambda-\lambda_1+\mu)+(a_1^2+a_2^2)\lambda_1(\lambda+2\mu)]} \\ \epsilon_{33}^0 &= \frac{6a_1a_2\epsilon_0^*\lambda_1\mu(\lambda+\mu)}{(3\lambda+2\mu)[2a_1a_2\mu(\lambda-\lambda_1+\mu)+(a_1^2+a_2^2)\lambda_1(\lambda+2\mu)]} \\ \epsilon_{23}^0 &= \epsilon_{31}^0 = \epsilon_{12}^0 = 0 \end{aligned} \right. \quad z \in D \quad (20)$$

最后,利用式(10)得到夹杂物中的应力分布为

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= -p_0\delta_{ij} = \\ & -\delta_{ij} \frac{6a_1a_2\epsilon_0^*\lambda_1\mu(\lambda+\mu)}{2a_1a_2\mu(\lambda-\lambda_1+\mu)+(a_1^2+a_2^2)\lambda_1(\lambda+2\mu)} \end{aligned} \quad z \in D \quad (21)$$

式中 p_0 表示液体中的压力, p_0 为正值且满足

$$\epsilon_0^* = \frac{2a_1a_2\mu(\lambda-\lambda_1+\mu)+(a_1^2+a_2^2)\lambda_1(\lambda+2\mu)}{6a_1a_2\lambda_1\mu(\lambda+\mu)} p_0 \quad z \in D \quad (22)$$

由式(22)可得知,液体的压缩应变 ϵ_0^* 实际上与液体的体积模量 λ_1 、基体的弹性常数、夹杂形状及压力 p_0 等有关。将式(22)代入式(20),等效特征应变可用压力 p_0 表示为

$$\left\{ \begin{aligned} \epsilon_{11}^0 &= \frac{a_2(\lambda+2\mu)(3\lambda+2\mu)-a_1\lambda\mu}{\mu(3\lambda+2\mu)2(\lambda+\mu)a_1} p_0 \\ \epsilon_{22}^0 &= \frac{a_1(\lambda+2\mu)(3\lambda+2\mu)-a_2\lambda\mu}{\mu(3\lambda+2\mu)2(\lambda+\mu)a_2} p_0 \\ \epsilon_{33}^0 &= \frac{p_0}{3\lambda+2\mu} \\ \epsilon_{23}^0 &= \epsilon_{31}^0 = \epsilon_{12}^0 = 0 \end{aligned} \right. \quad (23)$$

根据式(23),可将式(17)转化为

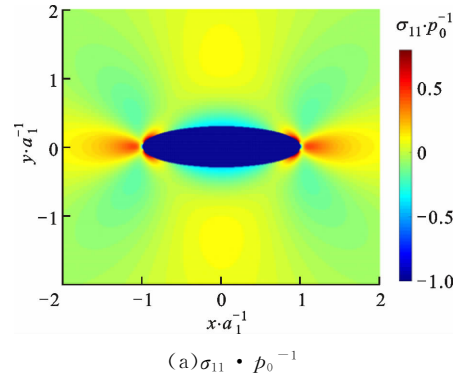
$$\left\{ \begin{aligned} \Phi_E(z) &= \frac{p_0}{2} \left[\frac{z}{a_1+z} \sqrt{\frac{(a_1+z)^2}{z^2-a_1^2+a_2^2}} - 1 \right] \\ \Omega_E(z) &= p_0 \left[\frac{3a_2^2+a_1^2}{2(a_1^2-a_2^2)} - \frac{2(3-\kappa)(\kappa-1)}{(1+\kappa)(7-\kappa)} \cdot \right. \\ & \quad \left. \frac{a_1a_2}{a_1^2-a_2^2} \right] \left(\frac{z}{a_1+z} \sqrt{\frac{(a_1+z)^2}{z^2-a_1^2+a_2^2}} - 1 \right) + \\ & \quad \frac{a_2^2p_0}{a_1^2-a_2^2} \left[2 + \frac{z(a_1+z)(3a_1^2-3a_2^2-2z^2)}{(z^2-a_1^2+a_2^2)^2} \cdot \right. \\ & \quad \left. \sqrt{\frac{z^2-a_1^2+a_2^2}{(a_1+z)^2}} \right] \end{aligned} \right. \quad z \notin D \quad (24)$$

式中 $\lambda = \mu \frac{(3-\kappa)}{(\kappa-1)}$ 。

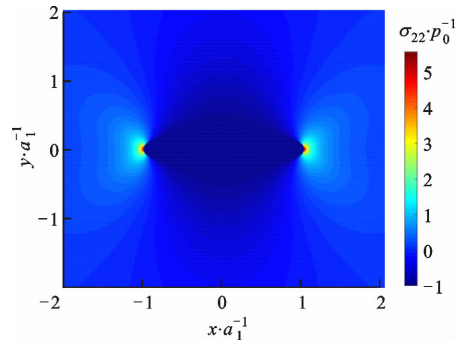
圆形夹杂的解由式(18)得到

$$\left\{ \begin{aligned} \Phi_E(z) &= 0 \\ \Omega_E(z) &= \frac{2(5+\kappa)p_0}{(1+\kappa)(7-\kappa)} \frac{a_1^2}{z^2} \end{aligned} \right. \quad z \notin D \quad (25)$$

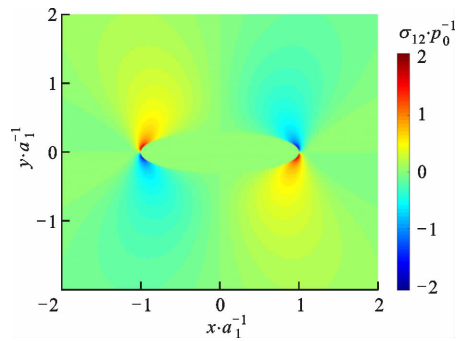
将式(24)代入式(12),可得到夹杂外部应力场。为了能够更直观地反映应力分布情况,取 $\xi = a_2/a_1 = 0.3$, $\kappa = 3 - 4\nu = 5/3$, x 和 y 坐标以主轴长度 a_1 作无量纲化处理,得到如图6所示的具有内压 p_0 的液体夹杂系统的无量纲应力分布。由图6可知:①无量纲应力 σ_{11}/p_0 和 σ_{22}/p_0 关于 x 轴和 y 轴对称,而应力 σ_{12}/p_0 关于 x 轴和 y 轴反对称;②在长轴端点附近会出现高度应力集中现象,且 σ_{22}/p_0 的应力



(a) $\sigma_{11} \cdot p_0^{-1}$



(b) $\sigma_{22} \cdot p_0^{-1}$



(c) $\sigma_{12} \cdot p_0^{-1}$

图6 内压引起的液体夹杂系统中的无量纲应力分布
Fig. 6 The normalized stress distributions in liquid inclusion system due to interior pressure

集中远高于其他两个应力分量。

此外, σ_{22}/p_0 较高的应力幅值表明其对系统影响更大,因此,应力 σ_{22}/p_0 沿 x 轴的分布(见图 5 和图 6)可以由式(24)和式(12)推导得出

$$\frac{\sigma_{22}(\bar{x})}{p_0} = \left[\frac{1+\xi^2}{1-\xi^2} - \frac{2\xi(3-\kappa)(\kappa-1)}{(7-\kappa)(1+\kappa)(1-\xi^2)} \right] \cdot \left(\frac{\bar{x}}{\sqrt{\bar{x}^2-1+\xi^2}} - 1 \right) + \frac{\xi^2}{1-\xi^2} \left[2 + \frac{\bar{x}(3-3\xi^2-2\bar{x}^2)}{(\xi^2-1+\bar{x}^2)^{3/2}} \right] \quad (26)$$

式中: $\xi = a_2/a_1$; $\bar{x} = x/a_1$ 。

图 7 给出了不同长短轴纵横比 $\xi = a_2/a_1$ 下沿 x 轴的外场无量纲拉应力 σ_{22}/p_0 变化曲线。可以看出, ξ 的比值越小,长轴端点处($\bar{x}=1$)应力集中越大。因此,对于一个非常扁平的椭圆夹杂,即使压力 p_0 很小,也会产生非常高的应力集中,而当 ξ 趋于 0 时,椭圆夹杂退化为标准有限裂纹问题。

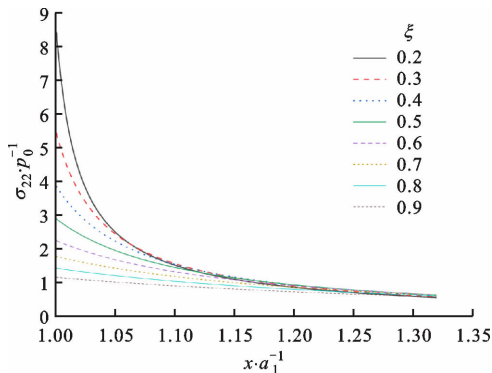


图 7 不同纵横比 ξ 下外场 σ_{22}/p_0 沿 $\bar{x} = x/a_1$ 轴的分布曲线
Fig. 7 σ_{22}/p_0 distribution profiles along the axis $\bar{x} = x/a_1$ against aspect ratio ξ of minor and major axes

现有观点认为,土体液化是由于土体受到外力振动,原本松散的土体受到压缩,内部孔隙减小,导致空隙内水压升高,当水压升高至超过土体内承受的外部压力时,将产生土体液化^[23-24]。本节的研究结果对土体液化提供一个新的机理解释,即靠近液体长轴端点处的土体应力集中,导致土体可能在该处因强度丧失而提早破坏,从而引起土体液化。

4 远场剪切载荷作用下的椭圆液体夹杂的解

在本节中,主要从两个方面对远场剪切载荷作用下的椭圆液体夹杂进行分析:Style 等^[14]的研究表明,小的液体夹杂能够增强软固体的刚度,然而,在宏观尺度上,液体夹杂对复合系统剪切模量的影响还不可知;土体滑坡是土力学中的一个重要研

究课题,其由剪切载荷引发^[25-26],但是针对含有液体的土体滑坡问题研究很少,微观力学分析可能会为该问题提供一些新的研究思路。

如图 8 所示,受远场剪切载荷作用的椭圆液体夹杂嵌于无限弹性平面固体中,图 8 中 σ_{12}^∞ 为远场剪切载荷,箭头表示其方向,接下来将探讨上述液体夹杂问题。

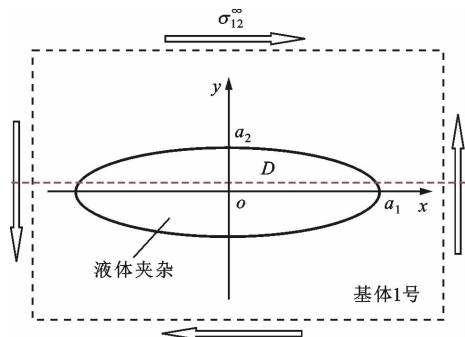


图 8 嵌于无限弹性平面固体受远场剪切载荷作用的椭圆液体夹杂

Fig. 8 An elliptical liquid inclusion embedded in an infinite plane solid subjected to far-field shear loading

4.1 远场剪切载荷作用下的椭圆液体夹杂内部应力场

由于 $\mu_1 = 0$, $\epsilon_{ij}^* = 0$, $\sigma_{12}^\infty \neq 0$, 其他远场应力分量 $\sigma_{ij}^\infty = 0$, 因此将式(7)代入式(9)得到等效特征应变表达式为

$$\begin{cases} \epsilon_{12}^0 = \frac{(a_1+a_2)^2(\lambda+2\mu)\sigma_{12}^\infty}{4a_1a_2\mu(\lambda+\mu)}, & \mathbf{x} \in D \\ \epsilon_{ij}^0 = 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (27)$$

由式(10)得到夹杂内的应力为

$$\sigma_{ij} = 0, \quad \mathbf{x} \in D \quad (28)$$

这表明,液体夹杂不承受远场剪切载荷,因此,远场剪切载荷将被重新分配并完全施加在基体材料上,导致系统产生较大的剪切变形,或者可以理解为液体夹杂的存在会减小复合系统的整体剪切模量。

4.2 远场剪切载荷引起的复势

结合式(27),式(17)可转化为

$$\begin{cases} \Phi_E(z) = -i \frac{(a_1+a_2)^2\sigma_{12}^\infty}{2(a_1^2-a_2^2)} \left(\frac{z}{a_1+z} \sqrt{\frac{(a_1+z)^2}{z^2-a_1^2+a_2^2}} - 1 \right) \\ \Omega_E(z) = i \frac{(a_1+a_2)^2\sigma_{12}^\infty}{2(a_1^2-a_2^2)} \left(\frac{z}{a_1+z} \sqrt{\frac{(a_1+z)^2}{z^2-a_1^2+a_2^2}} - 1 \right) - i \frac{a_2^2(a_1+a_2)^2\sigma_{12}^\infty}{(a_1^2-a_2^2)^2} \left[2 + \frac{z(a_1+z)(3a_1^2-3a_2^2-2z^2)}{(z^2-a_1^2+a_2^2)^2} \right. \\ \left. \sqrt{\frac{z^2-a_1^2+a_2^2}{(a_1+z)^2}} \right] \end{cases}$$

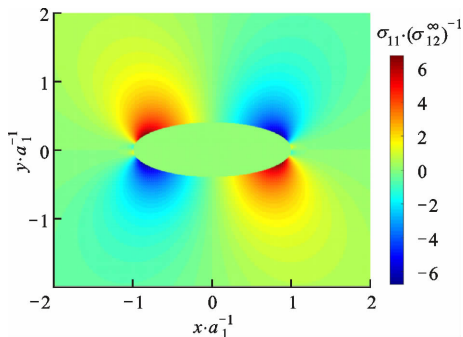
$$z \notin D \quad (29)$$

式中 $\lambda = \mu(3 - \kappa) / (\kappa - 1)$ 。

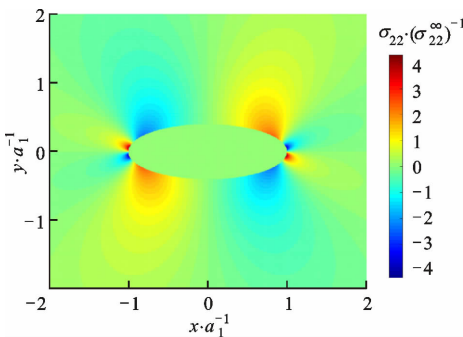
将式(29)代入式(12),并结合远场载荷将得到应力场。同样,圆形夹杂的解由式(18)得到

$$\begin{cases} \Phi_E(z) = -i\sigma_{12}^\infty \frac{a_1^2}{z^2} \\ \Omega_E(z) = i\sigma_{12}^\infty \left(\frac{a_1^2}{z^2} - \frac{3a_1^4}{z^4} \right) \end{cases}, \quad z \notin D \quad (30)$$

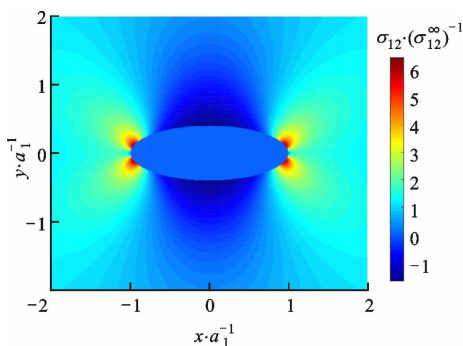
图9为远场剪切载荷 σ_{12}^∞ 引起的液体夹杂系统的无量纲应力分布场,分别为 $\sigma_{11}/\sigma_{12}^\infty$ 、 $\sigma_{22}/\sigma_{12}^\infty$ 、 $\sigma_{12}/\sigma_{12}^\infty$,取式(29)中 $\xi = a_2/a_1 = 0.4$, x 和 y 坐标以主轴长度 a_1 作无量纲化处理。由图9可知,无量纲化应



(a) $\sigma_{11} \cdot (\sigma_{12}^\infty)^{-1}$



(b) $\sigma_{22} \cdot (\sigma_{12}^\infty)^{-1}$



(c) $\sigma_{12} \cdot (\sigma_{12}^\infty)^{-1}$

图9 远场剪切载荷 σ_{12}^∞ 引起的液体夹杂系统中的无量纲应力分布

Fig. 9 The normalized stress distributions in liquid inclusion system due to the far-field shear load σ_{12}^∞

力 $\sigma_{11}/\sigma_{12}^\infty$ 和 $\sigma_{22}/\sigma_{12}^\infty$ 关于 x 轴和 y 轴反对称,而 $\sigma_{12}/\sigma_{12}^\infty$ 关于 x 轴和 y 轴对称;应力集中并不完全在长轴端点处,而是在其附近,所有应力分量的幅值相差不大。

由式(29)可以看出,随着长短轴纵横比 ξ 的减小,应力集中向长轴(x 轴)的端点移动。图8中外场沿 x 轴的剪切应力可表示为

$$\frac{\sigma_{12}}{\sigma_{12}^\infty} = \frac{1 + \xi}{1 - \xi} \left(\frac{\bar{x}}{\sqrt{\bar{x}^2 - 1 + \xi^2}} - 1 \right) - \frac{\xi^2}{(1 - \xi)^2} \left[2 + \frac{\bar{x}(3 - 3\xi^2 - 2\bar{x}^2)}{(\xi^2 - 1 + \bar{x}^2)^{3/2}} \right] + 1 \quad (31)$$

令 $\bar{x} = (\bar{x}_1 + 1)$, 得到

$$\frac{\sigma_{12}}{\sigma_{12}^\infty} = \frac{1 + \xi}{1 - \xi} \left(\frac{\bar{x}_1 + 1}{\sqrt{(\bar{x}_1 + 1)^2 - 1 + \xi^2}} - 1 \right) - \frac{\xi^2}{(1 - \xi)^2} \left[2 + \frac{(\bar{x}_1 + 1)(3 - 3\xi^2 - 2(\bar{x}_1 + 1)^2)}{(\xi^2 - 1 + (\bar{x}_1 + 1)^2)^{3/2}} \right] + 1 \quad (32)$$

式中: $\xi = a_2/a_1$; $\bar{x} = x/a_1$ 。

图10给出了不同长短轴纵横比 $\xi = a_2/a_1$ 下夹杂外场沿 x 轴的无量纲化剪应力 $\sigma_{12}/\sigma_{12}^\infty$ 变化。可以看出, ξ 越小,沿 x 轴的剪应力集中越大,随着 ξ 的减小,最大剪应力向长轴端点处移动。

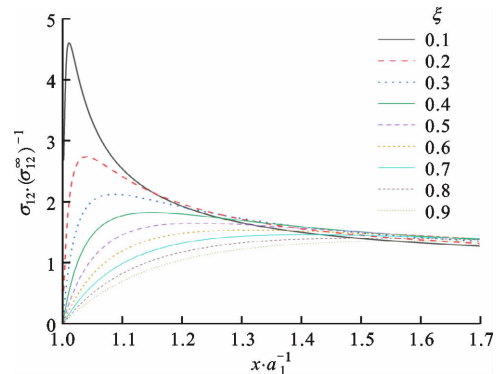


图10 不同纵横比 ξ 下的受远场剪切载荷作用夹杂外场 $\bar{x} = x/a_1$ 轴的无量纲剪应力曲线

Fig. 10 The normalized shear stress distribution along the x -axis due to far-field shear loading, where the stress concentration gradually increases and moves to the endpoint of the major axis with the decrease of the aspect ratio ξ

可以发现,本节中的公式并未涉及液体性质,这意味着液体夹杂在这种载荷条件下相当于一个空腔。实际上,该解与椭圆孔在远场剪切载荷作用下的解相同,受远场剪切载荷作用的细长形液体夹杂将导致夹杂周围产生应力集中,从而可能破坏基体。

研究表明:土体滑坡是滑坡体中存在宏观剪切

作用,导致某个面的剪应力达到抗剪承载力、引发相对滑动。本节的研究结果对含有液体的土体滑坡提供一个新的机理解释,即液体夹杂的存在减小了系统整体的剪切模量,且在远场剪切载荷作用下,靠近液体长轴端点处的土体发生应力集中,因此对于含有液体的土体滑坡问题,液体夹杂的存在会促进滑坡的提早发生。

5 远场拉伸载荷作用下 Inglis 椭圆孔问题的解

1913 年,Inglis 发表了椭圆孔受远场外力的以级数表达的渐进解^[10]。需要指出的是,Inglis 的解和 Griffith 裂纹表面能概念的提出开启了断裂力学的新纪元。由于 Inglis 解是在曲线坐标系下表达的,不便于使用,因此在本节中通过对这一问题重新研究,获得其直角坐标系下的显式解析解简洁形式。

对于如图 11 所示在无限大板受远场拉伸载荷作用下的椭圆孔问题,式(7)转换为

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mu \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{C}^* = \mathbf{0}, \quad \boldsymbol{\varepsilon}^* = \mathbf{0}$$
$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} \\ \varepsilon_{12} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\varepsilon}^0 = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11}^0 \\ \varepsilon_{22}^0 \\ \varepsilon_{33}^0 \\ \varepsilon_{23}^0 \\ \varepsilon_{31}^0 \\ \varepsilon_{12}^0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\sigma}^\infty = \begin{bmatrix} 0 \\ \sigma_{22}^0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(33)

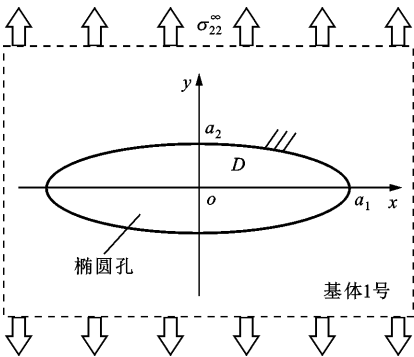


图 11 嵌于无限大固体中受远场拉伸载荷作用的 Inglis 椭圆孔

Fig. 11 The Inglis' elliptical hole embedded in an infinite solid subjected to far-field tensile loading

同样,等效特征应变由式(9)得到

$$\begin{cases} \varepsilon_{11}^0 = -\frac{\sigma_{22}^\infty (\lambda^2 + 4\lambda\mu + 2\mu^2)}{2\mu(\lambda + \mu)(3\lambda + 2\mu)} \\ \varepsilon_{22}^0 = \frac{\sigma_{22}^\infty [2a_2(\lambda + \mu)^2 + a_1(\lambda + 2\mu)(3\lambda + 2\mu)]}{2a_2\mu(\lambda + \mu)(3\lambda + 2\mu)} \\ \varepsilon_{33}^0 = -\frac{\sigma_{22}^\infty \lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} \\ \varepsilon_{23}^0 = \varepsilon_{31}^0 = \varepsilon_{12}^0 = 0 \end{cases}$$
$$\mathbf{x} \in D$$

(34)

结合式(9)和式(33),由式(10)得到椭圆孔中的应力分布为

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}(\mathbf{S} - \mathbf{I})\boldsymbol{\varepsilon}^0 + \boldsymbol{\sigma}^\infty =$$
$$\mathbf{C}(\mathbf{S} - \mathbf{I})(\mathbf{C} - \mathbf{C}\mathbf{S})^{-1}\boldsymbol{\sigma}^\infty + \boldsymbol{\sigma}^\infty = \mathbf{0}, \quad \mathbf{x} \in D$$

(35)

这也验证了之前的推导。

根据式(34),式(17)转换为

$$\begin{cases} \Phi_E(z) = \frac{\sigma_{22}^\infty a_1}{2(a_1 - a_2)} \left(\frac{z}{a_1 + z\sqrt{\frac{(a_1 + z)^2}{z^2 - a_1^2 + a_2^2}}} - 1 \right) \\ \Omega_E(z) = \frac{\sigma_{22}^\infty a_1 a_2}{a_1^2 - a_2^2} \left[\frac{(3 - \kappa)^2}{(1 + \kappa)(7 - \kappa)} + \frac{(a_1 - a_2)}{2a_2} \right] \cdot \\ \left(\frac{z}{a_1 + z\sqrt{\frac{(a_1 + z)^2}{z^2 - a_1^2 + a_2^2}}} - 1 \right) + \frac{\sigma_{22}^\infty (a_1 + a_2)a_1 a_2^2}{(a_1^2 - a_2^2)^2} \cdot \\ \left[2 + \frac{z(a_1 + z)(3a_1^2 - 3a_2^2 - 2z^2)}{(z^2 - a_1^2 + a_2^2)^2} \sqrt{\frac{z^2 - a_1^2 + a_2^2}{(a_1 + z)^2}} \right] \end{cases}$$
$$z \notin D$$

(36)

式中 $\lambda = \mu(3 - \kappa)/(\kappa - 1)$ 。

圆形夹杂由式(18)得到

$$\begin{cases} \Phi_E(z) = \frac{\sigma_{22}^\infty a_1^2}{2z^2} \\ \Omega_E(z) = \frac{(3 - \kappa)^2 \sigma_{22}^\infty}{2(1 + \kappa)(7 - \kappa)} \frac{a_1^2}{z^2} + \frac{3\sigma_{22}^\infty a_1^4}{2z^4} \end{cases}$$
$$z \notin D$$

(37)

将式(36)代入式(12),得到由等效特征应变引起的基体应力场,总应力由基体应力场加上远场载荷 $\boldsymbol{\sigma}^\infty$ 得到。相比较 Inglis 的渐进解,此处给出的解是一种通用形式,适用于平面应变($\kappa = 3 - 4\nu$)情况和平面应力($\kappa = (3 - \nu)/(1 + \nu)$)情况, ν 为泊松比。

6 结 论

异性夹杂力学是一个经典的固体力学问题,它的应用意义不言而喻,但是对其的研究仍存在很多不足。本文主要研究了二维 Eshelby 椭圆异性夹杂的外场问题。利用等效特征应变原理和复变格林函数法,得到了具有均匀特征应变分布的 Eshelby 椭圆异性夹杂在远场载荷作用下内外场的一般显式解析解。

本文特别探讨了它在液体夹杂问题中的应用,并将液体夹杂和固体夹杂统一到 Eshelby 夹杂力学框架内。研究表明,液体夹杂中的内压会导致长轴端点处产生严重的应力集中,从而为土体液化提供了一个新的机理解释。此外,在纯剪切荷载作用下,剪切应力集中并不完全产生在长轴端点处,而是在端点附近,并且液体夹杂的存在会减小系统整体的剪切模量,这一研究揭示了液体夹杂对土体滑坡的影响。最后,重新研究了著名的 Inglis 椭圆孔问题,并给出了其在直角坐标系下的显式解析解。

本文得到的 Eshelby 椭圆异性夹杂问题的一般解析解更简洁,期望它能为解决不同学科中的一系列 Eshelby 椭圆异性夹杂问题提供参考。

参考文献:

- [1] MURA T. Micromechanics of defects in solids [M]. 2nd ed. Dordrecht, Netherlands: Springer, 1987.
- [2] ESHELBY J D, PEIERLS R E. The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion, and related problems [J]. Proceedings of the Royal Society of London: Series A Mathematical and Physical Sciences, 1957, 241(1226): 376-396.
- [3] ESHELBY J D, PEIERLS R E. The elastic field outside an ellipsoidal inclusion [J]. Proceedings of the Royal Society of London: Series A Mathematical and Physical Sciences, 1959, 252(1271): 561-569.
- [4] 李涛, 邹文楠. 平面任意形状等剪切模量异质夹杂问题的解析解 [J]. 固体力学学报, 2021, 42(5): 552-566.
LI Tao, ZOU Wennan. Analytical solution for the Eshelby problem of an arbitrarily shaped inhomogeneous inclusion with the same shear modulus as the matrix in an infinite plane [J]. Chinese Journal of Solid Mechanics, 2021, 42(5): 552-566.
- [5] MURA T. Inclusion problems [J]. Applied Mechanics Reviews, 1988, 41(1): 15-20.
- [6] MURA T, SHODJA H M, HIROSE Y. Inclusion problems [J]. Applied Mechanics Reviews, 1996, 49(10S): S118-S127.
- [7] CHEN C Q, CUI J Z, DUAN H L, et al. Perspectives in mechanics of heterogeneous solids [J]. Acta Mechanica Sinica, 2011, 24(1): 1-26.
- [8] ZHOU Kun, HOH H J, WANG Xu, et al. A review of recent works on inclusions [J]. Mechanics of Materials, 2013, 60: 144-158.
- [9] CHRISTENSEN R M. Mechanics of composite materials [M]. New York, US: Wiley, 1979.
- [10] INGLIS C E. Stresses in a plate due to the presence of cracks and sharp corners [J]. Trans Inst Naval Architect, 1913, 55: 219-230.
- [11] HARDIMAN N J. Elliptic elastic inclusion in an infinite elastic plate [J]. The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics, 1954, 7(2): 226-230.
- [12] HUTCHINSON J W, HILL R. Bounds and self-consistent estimates for creep of polycrystalline materials [J]. Proceedings of the Royal Society of London: A Mathematical and Physical Sciences, 1976, 348(1652): 101-127.
- [13] JIN Xiaoqing, WANG Zhanjiang, ZHOU Qinghua, et al. On the solution of an elliptical inhomogeneity in plane elasticity by the equivalent inclusion method [J]. Journal of Elasticity, 2014, 114(1): 1-18.
- [14] STYLE R W, WETTLAUER J S, DUFRESNE E R. Surface tension and the mechanics of liquid inclusions in compliant solids [J]. Soft Matter, 2015, 11(4): 672-679.
- [15] 李锡英, 王爽, 鲁璐, 等. 液相夹杂复合软材料的设计、制备与力学性能研究进展 [J]. 复合材料学报, 2021, 38(1): 1-15.
LI Xiyang, WANG Shuang, LU Lu, et al. Design, fabrication and mechanical properties of soft composites with liquid inclusions [J]. Acta Materialia Sinica, 2021, 38(1): 1-15.
- [16] WU J, RU C Q, ZHANG L. An elliptical liquid inclusion in an infinite elastic plane [J]. Proceedings of the Royal Society: A Mathematical, Physical and Engineering Sciences, 2018, 474(2215): 20170813.
- [17] MUSKHELISHVILI N I. Some problems in mathematical theory of elasticity [M]. Groningen: Noordhoff Limited, 1953.
- [18] MA Lifeng. Fundamental formulation for transformation toughening [J]. International Journal of Solids and Structures, 2010, 47(22/23): 3214-3220.
- [19] MA Lifeng, KORSUNSKY A M. The principle of equivalent eigenstrain for inhomogeneous inclusion problems [J]. International Journal of Solids and Structures, 2014, 51(25/26): 4477-4484.
- [20] MA Lifeng, WANG Biao, KORSUNSKY A M. Plane deformation of circular inhomogeneous inclusion problems with non-uniform symmetrical dilatational eigenstrain [J]. Materials & Design, 2015, 86: 809-817.
- [21] SCHULTZ R, ATKINSON G, EATON D W, et al. Hydraulic fracturing volume is associated with induced earthquake productivity in the Duvernay play [J]. Sci-

ence, 2018, 359(6373): 304-308.

- [22] SOBHANIARAGH B, MANSUR W J, PETERS F C. The role of stress interference in hydraulic fracturing of horizontal wells [J]. International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences, 2018, 106: 153-164.
- [23] 王夏城. 浅析土壤液化判别标准 [J]. 四川水泥, 2018 (9): 307.
- WANG Xiacheng. Analysis of soil liquefaction criterion [J]. Sichuan Cement, 2018(9): 307.
- [24] 高飞. 土壤液化及 T-Z 非对称性的研究 [J]. 天津科技, 2017, 44(3): 57-59.
- GAO Fei. Soil liquefaction and T-Z asymmetry [J]. Tianjin Science & Technology, 2017, 44(3): 57-59.
- [25] MOULAS E, BURG J P, PODLADCHIKOV Y. Stress field associated with elliptical inclusions in a deforming matrix: Mathematical model and implications for tectonic overpressure in the lithosphere [J]. Tectonophysics, 2014, 631: 37-49.
- [26] KOKUSHO T. Major advances in liquefaction research by laboratory tests compared with in situ behavior [J]. Soil Dynamics and Earthquake Engineering, 2016, 91: 3-22.

附录 A 具有均匀特征应变分布的椭圆同性夹杂和 Eshelby 张量

具有特定的均匀特征应变分布的椭球同性夹杂,内部场的总应变表达式,即式(1),可用矩阵形式表示

$$\begin{bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ \epsilon_{23} \\ \epsilon_{31} \\ \epsilon_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{1111} & S_{1122} & S_{1133} & 2S_{1123} & 2S_{1131} & 2S_{1112} \\ S_{2211} & S_{2222} & S_{2233} & 2S_{2223} & 2S_{2231} & 2S_{2212} \\ S_{3311} & S_{3322} & S_{3333} & 2S_{3323} & 2S_{3331} & 2S_{3312} \\ S_{2311} & S_{2322} & S_{2333} & 2S_{2323} & 2S_{2331} & 2S_{2312} \\ S_{3111} & S_{3122} & S_{3133} & 2S_{3123} & 2S_{3131} & 2S_{3112} \\ S_{1211} & S_{1222} & S_{1233} & 2S_{1223} & 2S_{1231} & 2S_{1212} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_{11}^0 \\ \epsilon_{22}^0 \\ \epsilon_{33}^0 \\ \epsilon_{23}^0 \\ \epsilon_{31}^0 \\ \epsilon_{12}^0 \end{bmatrix} \quad (A1)$$

其中

$$\begin{cases} S_{1111} = \frac{3}{8\pi(1-\nu)}a_1^2I_{11} + \frac{1-2\nu}{8\pi(1-\nu)}I_1 \\ S_{1122} = \frac{1}{8\pi(1-\nu)}a_2^2I_{12} - \frac{1-2\nu}{8\pi(1-\nu)}I_1 \\ S_{1133} = \frac{1}{8\pi(1-\nu)}a_3^2I_{13} - \frac{1-2\nu}{8\pi(1-\nu)}I_1 \\ S_{1212} = \frac{a_1^2+a_2^2}{16\pi(1-\nu)}I_{12} + \frac{1-2\nu}{16\pi(1-\nu)}(I_1+I_2) \end{cases} \quad (A2-1)$$

$$\begin{cases} I_1 = 2\pi a_1 a_2 a_3 \int_0^\infty \frac{ds}{(a_1^2+s)\Delta(s)} \\ I_{11} = 2\pi a_1 a_2 a_3 \int_0^\infty \frac{ds}{(a_1^2+s)^2\Delta(s)} \\ I_{12} = 2\pi a_1 a_2 a_3 \int_0^\infty \frac{ds}{(a_1^2+s)(a_2^2+s)\Delta(s)} \\ \Delta(s) = (a_1^2+s)^{\frac{1}{2}}(a_2^2+s)^{\frac{1}{2}}(a_3^2+s)^{\frac{1}{2}} \end{cases} \quad (A2-2)$$

其余系数由循环排列(1,2,3)和 (a_1, a_2, a_3) 确定

$$\begin{cases} S_{2222} = \frac{3}{8\pi(1-\nu)}a_2^2I_{22} + \frac{1-2\nu}{8\pi(1-\nu)}I_2 \\ S_{3333} = \frac{3}{8\pi(1-\nu)}a_3^2I_{33} + \frac{1-2\nu}{8\pi(1-\nu)}I_3 \\ S_{2233} = \frac{1}{8\pi(1-\nu)}a_3^2I_{23} - \frac{1-2\nu}{8\pi(1-\nu)}I_2 \\ S_{3311} = \frac{1}{8\pi(1-\nu)}a_1^2I_{31} - \frac{1-2\nu}{8\pi(1-\nu)}I_3 \\ S_{2211} = \frac{1}{8\pi(1-\nu)}a_1^2I_{21} - \frac{1-2\nu}{8\pi(1-\nu)}I_2 \\ S_{3322} = \frac{1}{8\pi(1-\nu)}a_2^2I_{32} - \frac{1-2\nu}{8\pi(1-\nu)}I_3 \\ S_{2323} = \frac{a_2^2+a_3^2}{16\pi(1-\nu)}I_{23} + \frac{1-2\nu}{16\pi(1-\nu)}(I_2+I_3) \\ S_{3131} = \frac{a_3^2+a_1^2}{16\pi(1-\nu)}I_{31} + \frac{1-2\nu}{16\pi(1-\nu)}(I_3+I_1) \\ S_{ijkl} = 0, \text{其他} \end{cases} \quad (A3)$$

令半轴长度 a_3 趋于无穷大,得到

$$\begin{cases} I_1 = \frac{4\pi a_2}{(a_1+a_2)}, \quad I_2 = \frac{4\pi a_1}{(a_1+a_2)} \\ I_3 = 0, \quad I_{13} = I_{23} = I_{33} = 0, \\ I_{12} = \frac{4\pi}{(a_1+a_2)^2} \\ I_{11} = \frac{1}{3} \left[\frac{4\pi}{a_1^2} - \frac{4\pi}{(a_1+a_2)^2} \right] \\ I_{22} = \frac{1}{3} \left[\frac{4\pi}{a_2^2} - \frac{4\pi}{(a_1+a_2)^2} \right] \\ a_3^2 I_{13} = \frac{4\pi a_2}{(a_1+a_2)}, \quad a_3^2 I_{23} = \frac{4\pi a_1}{(a_1+a_2)} \\ a_3^2 I_{33} = 0 \end{cases} \quad (A4)$$

从而得到

$$\begin{cases} S_{1111} = \frac{1}{2(1-\nu)} \left[\frac{a_2^2+2a_1a_2}{(a_1+a_2)^2} + \frac{(1-2\nu)a_2}{(a_1+a_2)} \right] \\ S_{2222} = \frac{1}{2(1-\nu)} \left[\frac{a_1^2+2a_1a_2}{(a_1+a_2)^2} + \frac{(1-2\nu)a_1}{(a_1+a_2)} \right] \\ S_{1122} = \frac{1}{2(1-\nu)} \left[\frac{a_2^2}{(a_1+a_2)^2} - \frac{(1-2\nu)a_2}{(a_1+a_2)} \right] \\ S_{2211} = \frac{1}{2(1-\nu)} \left[\frac{a_1^2}{(a_1+a_2)^2} - \frac{(1-2\nu)a_1}{(a_1+a_2)} \right] \end{cases} \quad (A5-1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} S_{1212} = \frac{1}{2(1-\nu)} \left[\frac{a_1^2 + a_2^2}{2(a_1 + a_2)^2} + \frac{(1-2\nu)}{2} \right] \\ S_{1133} = \frac{1}{2(1-\nu)} \frac{2\nu a_2}{(a_1 + a_2)}, \quad S_{3131} = \frac{1}{2} \frac{a_2}{(a_1 + a_2)} \\ S_{2233} = \frac{1}{2(1-\nu)} \frac{2\nu a_1}{(a_1 + a_2)}, \quad S_{2323} = \frac{1}{2} \frac{a_1}{(a_1 + a_2)} \\ S_{3333} = S_{3311} = S_{3322} = 0 \\ S_{ijkl} = 0, \text{其他} \end{array} \right. \quad (\text{A5-2})$$

因此,式(A1)可以简化为式(2),即式(1)可以简化为式(2)。

[本刊相关文献链接]

- 任伟,吴冰洁,邱阳,等.控氮304不锈钢热变形过程中的动态再结晶行为研究.2021,55(3):145-154. [doi:10.7652/xjtuxb202103017]
- 俞茂宏,武霞霞,史俊,等.确定土体破坏准则的一个新方法.2020,54(8):1-10. [doi:10.7652/xjtuxb202008001]
- 常龙飞,牛清正,宋伟,等.压阻式柔性应变传感纤维的手指姿态识别装置.2020,54(8):116-123. [doi:10.7652/xjtuxb202008015]
- 王成龙,周建星,孙文磊,等.行星齿轮传动柔性齿圈齿根动应力计算及光纤光栅检测方法.2020,54(6):122-132. [doi:10.7652/xjtuxb202006016]
- 刘英,汪行,陈嘉威.界面多应力作用下乙丙橡胶的特性变化及破坏机理.2019,53(10):86-95. [doi:10.7652/xjtuxb201910012]
- 万明佳,俞浪浪,易艳良,等.淬火方式对高硼合金组织及力学性能的影响.2019,53(8):90-97. [doi:10.7652/xjtuxb201908012]

- 辛腾达,王华,崔村燕,等.贮箱轻量化设计几何参数优化方法.2019,53(7):153-159. [doi:10.7652/xjtuxb201907021]
- 张俊红,王静超,徐天舒,等.考虑进气效应和非线性接触的活塞瞬态应力研究.2019,53(5):16-23. [doi:10.7652/xjtuxb201905003]
- 刘宇,傅波,林波,等.夹心式压电换能器压电片端面应力分析与结构优化.2019,53(2):55-62. [doi:10.7652/xjtuxb201902008]
- 卓明,杨利花,夏凯,等.考虑热场的重型燃气轮机组合转子盘间接触应力分析.2018,52(11):58-64. [doi:10.7652/xjtuxb201811009]
- 尹君,成小乐,胥光申,等.应力释放扁挤压筒的优化设计.2018,52(7):146-152. [doi:10.7652/xjtuxb201807021]
- 张俊红,戴胡伟,鲁鑫,等.流固耦合作用下航空发动机燃烧室热疲劳研究.2018,52(5):149-156. [doi:10.7652/xjtuxb201805021]
- 黄普光,黄旭.利用共形几何代数的平面并联机构位置正解求解方法.2018,52(3):76-82. [doi:10.7652/xjtuxb01803011]
- 鲁欢,于大鹏,张桂勇,等.应用点基局部光滑点插值法的固有频率上下界计算.2017,51(5):165-172. [doi:10.7652/xjtuxb201705023]
- 王庆朋,张力,尚会超,等.考虑应变硬化的混合弹塑性接触模型.2016,50(2):132-137. [doi:10.7652/xjtuxb201602022]
- 李昕,张永,殷德民,等.采用紧束缚格林函数法研究原子吸附石墨烯纳米带电子输运.2015,49(12):37-42. [doi:10.7652/xjtuxb201502007]
- 赵伟涛,吴九汇.球体表面受任意周期热扰动时非傅里叶导热的求解与分析.2014,48(1):13-18. [doi:10.7652/xjtuxb201401003]

(编辑 武红江 杜秀杰)