

谐波齿轮柔轮啮合点周向刚度的理论分析及仿真

陈晓霞¹, 吴鸿雁^{1,2}, 牛洪波¹, 姚云鹏¹, 邢静忠¹

(1. 天津工业大学天津市现代机电装备技术重点实验室, 300387, 天津;
2. 天津职业技术师范大学工程实训中心, 300222, 天津)

摘要: 为揭示柔轮结构对其啮合点周向刚度的影响规律,提升谐波齿轮的传动刚度,提出柔轮啮合点周向刚度的理论计算方法。该算法首先将周向力引起的柔轮啮合点变形拆分为筒体变形和齿体变形,分别推导周向力作用下柔轮杯底、光筒、齿圈和圆弧过渡部分的扭转变形及渐开线轮齿的弯曲和齿根转动的理论公式,并基于周向位移等效折算柔轮啮合点周向刚度;然后建立包含工艺结构及渐开线齿廓等真实结构的杯型柔轮实体单元有限元模型,对未装配变形柔轮模型和波发生器作用下产生装配变形的柔轮模型分别施加周向力,获得柔轮筒体和齿体的负载变形。有限元仿真结果表明:杯底对柔轮筒体的扭转刚度的影响最大,齿体弯曲在齿体变形中的占比最大;装配变形增加了柔轮筒体的刚度,使其负载周向变形减小了约 10%;减小齿廓压力角、增大变位系数和齿宽,可提高齿体刚度;柔轮筒体和齿体变形的理论解与有限元解的偏差分别为 1.3%和 2.2%;啮合点周向刚度的理论解与有限元解的相对偏差为-5%,验证了该算法的有效性。

关键词: 谐波齿轮传动;柔轮;啮合点;周向刚度;有限元仿真

中图分类号: TH132. 43 **文献标志码:** A

DOI: 10. 7652/xjtuxb202110021 **文章编号:** 0253-987X(2021)10-0184-09



OSID 码

Theoretical Analysis and FEM Simulation on Circumferential Stiffness of Meshing Point of Flexspline in Harmonic Drive

CHEN Xiaoxia¹, WU Hongyan^{1,2}, NIU Hongbo¹, YAO Yunpeng¹, XING Jingzhong¹

(1. Tianjin Key Laboratory of Modern Mechatronics Equipment Technology, Tiangong University, Tianjin 300387, China;
2. Engineering Training Center, Tianjin University of Technology and Education, Tianjin 300222, China)

Abstract: In order to reveal the influence law of flexspline structure on the circumferential stiffness of its meshing point and improve the transmission stiffness of harmonic drive, a theoretical calculation method for the circumferential stiffness of flexspline meshing point is proposed. The deformation of flexspline meshing point caused by the circumferential force is divided into the deformation of cylinder and the deformation of tooth. Theoretical formulas of torsion deformation of flexspline cup bottom, smooth cylinder, ring gear and arc transition part, bending of involute gear tooth and rotation of tooth root under circumferential force are derived respectively, and the circumferential stiffness of the flexspline meshing point is equivalently converted based on circumferential displacement. A solid element finite element model of the cup flexspline is established, which includes the real structure of process structure and involute tooth profile. The circumferential force is applied to the flexspline model without assembly deformation

and the flexspline model with assembly deformation under the action of wave generator respectively to obtain the load deformation of flexspline cylinder and tooth body. The finite element simulation results show that the cup bottom has the greatest influence on the torsional stiffness of the flexspline cylinder, and the tooth bending has the largest proportion in the tooth deformation. The assembly deformation increases the stiffness of the flexspline cylinder and reduces the load circumferential deformation by about 10%. The stiffness of the tooth is improved by reducing the pressure angle of tooth profile and increasing the modification coefficient and tooth width. The deviations between the theoretical solution and the finite element solution of deformation of the flexspline cylinder and tooth body are 1.3% and 2.2% respectively. The relative deviation between the theoretical solution and the finite element solution of circumferential stiffness of the meshing point is -5% , which verifies the effectiveness of the proposed algorithm.

Keywords: harmonic drive; flexspline; meshing point; circumferential stiffness; finite element method simulation

谐波齿轮传动是依靠柔轮波动变形来实现运动传递的精密传动技术^[1],具有体积小、重量轻、承载能力高、传动精度和传动效率高等优点,被广泛应用于空间技术、机器人、机床、仪器仪表、医疗器械等需要精密传动的领域^[2-4]。柔轮波动变形使得谐波齿轮传动系统的扭转刚度呈非线性特征^[5-6],影响其传动性能^[7-8]。柔轮啮合点的周向啮合刚度是整机扭转刚度的重要组成部分^[9],其非线性特性对系统的传动精度和弹性回差具有重要影响。

受载后啮合齿对间非均匀分布的啮合力随着负载力矩、啮合参数和结构参数的变化而变化,因此,负载工况下柔轮变形的非线性使谐波齿轮的负载性能更加复杂^[10]。实验装置研制和负载性能的实验研究^[11-13]揭示了迟滞曲线中蕴含的非线性扭转刚度及其弹性回差等多项谐波齿轮的传动性能指标,特别是随负载大小不断变化的弹性回差是造成传动系统振动和噪音的主要来源,也是影响传动精度的主要因素。辛洪兵等运用能量法推导了简化为梯形齿的柔轮单齿啮合刚度,分析了单齿啮合刚度对谐波齿轮传动总刚度的影响^[14]。酆黎伟等等将轮齿简化为梯形齿,计算轮齿受载后的弯曲变形和剪切变形,及其简化为薄壁圆筒和输出轴圆盘的柔轮筒体的扭转变形,计算柔轮扭转刚度^[15],但没有考虑薄壁圆筒与圆盘之间的过渡圆角曲面的影响。潘峰等理论分析柔轮筒体和杯底的扭转变形,推导了系统回差的理论公式,并用有限元模型数值仿真验证^[16],但没有考虑齿体变形的影响。

韦乐余等将 CAD 模型导入到有限元系统,借助接触分析提取单齿刚度和和整机扭转刚度^[17]。

崔博文等结合平衡条件和接触准则获得基于有限元模型的啮合力分布和啮合点柔度矩阵^[18]。陈晓霞等提出基于壳单元筒体和实体单元齿体的有限元模型的啮合刚度矩阵的求解方法^[19]。

基于有限元模型的数值模拟研究更贴近实际,但未能和理论研究有效结合和相互比对,缺乏对啮合点刚度影响因素及其变化规律的揭示。为此,牛洪波推导中柔轮筒的扭转变形和齿体弯曲变形公式,并建立柔轮模型,计算了啮合力作用下柔轮筒体及轮齿的周向位移及啮合点刚度^[20]。研究发现:波发生器作用下的柔轮装配变形和轮齿影响与理论公式结果存在明显差异,装配变形及其不同装配变形状态对啮合点的周向刚度具有显著的影响,因此需进一步研究装配状态下的啮合点周向刚度的影响因素及其变化规律。

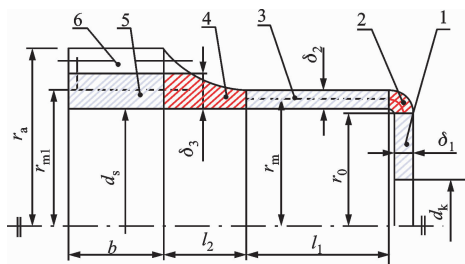
为揭示谐波齿轮啮合点周向刚度的组成要素及其影响规律,本文将柔轮分为筒体和齿体,分别推导周向力作用下柔轮杯底、杯底倒圆、光筒和齿圈以及柔轮齿体的理论变形,在此基础上提出柔轮啮合点周向刚度的理论计算方法。进一步建立了实体有限元模型,在未装配柔轮模型的所有轮齿上施加均布周向力,求解柔轮筒体各部分周向位移的平均值,并与理论结果比较。为反映柔轮负载实际,本文利用接触分析求解波发生器作用下柔轮的装配变形,随后在柔轮长轴处的轮齿啮合点上施加周向力,求解加力前后柔轮筒体各部分的周向位移差(即负载周向位移)及其齿体弯曲变形和齿根转角位移,最后计算啮合点的周向刚度,分析影响啮合点周向刚度的影响因素。本文所提出的柔轮啮合点周向刚度计算

方法可为提高谐波齿轮扭转刚度提供理论指导。

1 周向力作用下的柔轮负载变形

谐波齿轮是基于柔轮弹性变形的传动,波发生器使柔轮筒发生周向弯曲装配变形。虽然传动力矩引起的负载变形是在已发生的装配变形上叠加的变形,但周向啮合力使柔轮啮合点的负载周向变形从轮齿啮合点一直延伸到柔轮杯底输出端。柔轮啮合点的周向位移受柔轮齿体、齿圈、筒体和杯底变形的影响,这些部件的结构和变形形式不同,不能直接叠加,需按照啮合点周向位移等效原则折算。

杯型柔轮是薄壁结构。为便于计算,将柔轮分解为筒体和齿体两部分。根据不同的变形特征,筒体划分为齿圈、齿圈与光筒圆弧过渡段,光筒、杯底倒圆、杯底 5 个部分,如图 1 所示。柔轮筒体按薄壁圆柱壳、变厚度柱壳、等厚度圆环面及薄壁圆盘进行建模和理论推导;齿体(第 6 部分)按平面弯曲梁模型进行建模和理论变形的推导。



1—杯底;2—杯底倒圆;3—光筒;4—齿圈与光筒圆弧过渡段;
5—齿圈;6—轮齿; δ_1 —杯底厚度; δ_2 —光筒厚度; δ_3 —削去
轮齿后的齿圈厚度; r_a —齿顶圆半径; r_{m1} —削去轮齿后的
齿圈中性层半径; r_m —光筒中性层半径; r_0 —杯底倒圆与
杯底连接处的半径; d_k 、 d_s —柔轮杯底圆盘固定孔直径
和柔轮筒体内径; l_1 —光筒长度; l_2 —齿圈与光筒间
圆弧过渡段长度; b —齿圈宽度。

图 1 柔轮结构分解图

Fig. 1 A decomposition diagram of flexspline structure

考虑到刚轮的刚度远大于柔轮,负载传动工况下谐波齿轮传动中的负载变形主要来自柔轮,因此,本文对负载扭矩作用下的周向变形只考虑柔轮的负载变形。传动过程中的啮合点大部分在齿顶附近。在负载扭矩 T 作用下,啮合点处的周向力 F 和负载扭矩满足关系

$$T = 2Fr_a \quad (1)$$

在扭矩 T 作用下,柔轮筒体从杯底固定端到啮合端的齿圈各部分会产生扭转变形;齿体在周向力 F 作用下产生齿根转动、齿体弯曲和剪切变形。

1.1 柔轮筒体的变形

1.1.1 杯底的扭转变形 根据薄板圆盘受扭模型,对于厚度为 δ_1 的等厚度杯底,在扭矩 T 作用下,由胡可定律可得圆盘任意半径 r 位置处的剪切应变

$$\gamma_r = \frac{T}{2\pi G r^2 \delta_1} \quad (2)$$

式中: G 是材料的剪切模量, $G=E/2(1+\mu)$; E 为弹性模量; μ 为泊松比。

柔轮筒体的轴向变形很小,通常忽略不计。则柱坐标系下杯底圆盘的剪切应变为

$$\gamma_r = \frac{du_\theta}{dr} - \frac{u_\theta}{r} \quad (3)$$

式中: u_θ 为圆盘周向位移。

依据杯底内孔($r=d_k/2$)完全固定的边界条件(即 u_θ 为 0),求解式(3)得柔轮杯底最外缘($r=r_0$)处的周向位移

$$v_a = \left(\frac{1}{d_k^2} - \frac{1}{4r_0^2} \right) \frac{Tr_0}{\pi G \delta_1} \quad (4)$$

则杯底最外缘的转角位移

$$\theta_a = \left(\frac{1}{d_k^2} - \frac{1}{4r_0^2} \right) \frac{T}{\pi G \delta_1} \quad (5)$$

1.1.2 杯底倒圆的扭转变形 柔轮筒体与杯底通过杯底倒圆过渡连接,如图 2 所示为一段等厚度的 1/4 环面。图中 r_1 为环面的中面半径,圆弧 r_1 上任意一点的回转半径 $r=r_0+r_1\sin\theta$, r_0 为柔轮杯底与倒圆连接处的回转半径(回转轴为柔轮轴线), $r_0=r_m-r_1$ 。

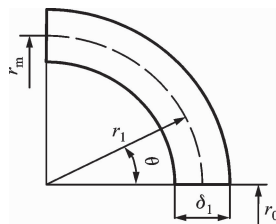


图 2 杯底倒圆示意图

Fig. 2 A fillet diagram of cup bottom

根据内力等效,在柔轮筒体上施加扭矩 T ,杯底上回转半径为 r 处的周向剪应力

$$\tau = \frac{T}{2\pi r^2 \delta_1} \quad (6)$$

设等厚度圆弧的单位体积 $dV=2\pi r \delta_1 r_1 d\theta$,对应的应变能为

$$U = \int_v \frac{\tau^2}{2G} dV \quad (7)$$

扭矩做功为

$$W = \frac{1}{2} T \theta_c \quad (8)$$

式中, θ_c 为杯底倒角圆弧两端的平均扭转角, 可由 $U=W$ 计算如下

$$\theta_c = \frac{Tr_1}{2G\delta_1\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{r^3} d\theta \quad (9)$$

由此得到该扭转变形对应的倒圆与光筒连接处中线的周向位移

$$v_c = \frac{Tr_1r_m}{2G\delta_1\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{(R-r_1+r_1\sin\theta)^3} d\theta \quad (10)$$

1.1.3 光筒的扭转变形 根据薄壁圆筒的扭转理论, 在扭矩 T 作用下, 光筒的扭转角

$$\theta_l = \frac{Tl_1}{GI_p} \quad (11)$$

式中: I_p 为光筒横截面极惯性矩, $I_p = 2\pi\delta_2r_m^3$ 。由此得光筒扭转变形引起的周向位移

$$v_t = \frac{4Tl_1r_m}{G\pi\delta_2(\delta_2+d_s)^3} \quad (12)$$

1.1.4 圆弧过渡段的扭转变形 齿圈与光筒之间由一段变截面圆弧过渡段连接, 外侧为内环面, 内侧为与柔轮内壁半径相等圆柱面, 如图 3 所示。

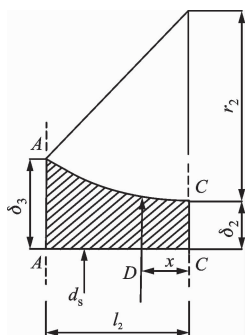


图 3 齿圈与光筒圆弧过渡段示意图

Fig. 3 A diagram of arc transition section between gear ring and smooth cylinder

圆弧过渡段的截面极惯性矩

$$I_{pg} = \frac{\pi}{32} (D^4 - d_s^4) \quad (13)$$

式中: $D = d_s + 2(\delta_2 + r_2 - \sqrt{r_2^2 - x^2})$; x 是过渡段变截面与光筒分界面的水平距离; D 是随 x 变化的圆弧段外径; r_2 是圆弧半径。根据薄壁圆筒的扭转理论, 可得过渡段前后截面的扭转角 θ_g 和对应的齿顶位移 v_g

$$\left. \begin{aligned} \theta_g &= \int_0^{l_2} \frac{T}{GI_{pg}} dx \\ v_g &= r_{m1} \theta_g \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

式中: $r_{m1} = (\delta_3 + d_s)/2$ 为齿圈的中性层半径。

1.1.5 齿圈圆环的扭转变形 实际齿圈是一个周向非均匀的圆环, 理论求解中无法考虑轮齿的影响。

定义齿圈圆环为削去轮齿后的等厚度圆柱筒。利用薄壁圆环理论计算周向力作用下齿圈两端的相对扭转角 θ_d 及齿圈中性层的周向位移 v_d

$$\left. \begin{aligned} \theta_d &= \frac{Tb}{GI_{pd}} \\ v_d &= r_{m1} \theta_d \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

式中: $I_{pd} = 2\pi\delta_3r_{m1}^3$ 为齿圈的截面极惯性矩。

1.2 柔轮齿体的变形

1.2.1 齿根转动 齿根转动引起的齿顶位移示意图如图 4 所示, 周向力 F 作用下, 齿圈所受弯矩等于 F 乘以齿高 h , 齿圈弯曲变形引起轮齿齿根处的扭转角为 θ_r , 使得齿顶点相对于齿根的周向位移, 简称转动变形用 v_r 表示

$$\left. \begin{aligned} \theta_r &= \frac{12\pi m F h}{Eb\delta_3^3} \\ v_r &= h\theta_r \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

式中: $h = r_a - r_{m1}$ 为结构齿高, m 为模数。

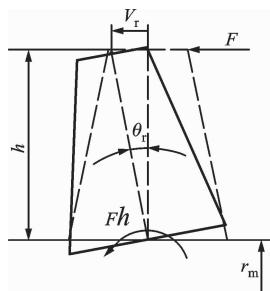


图 4 齿根转动引起的齿顶位移示意图

Fig. 4 A diagram of tooth top displacement caused by tooth root rotation

1.2.2 齿体的弯曲变形 对于非细长梁, 周向力 F 作用下会产生图 5 所示的弯曲变形和图 6 所示的剪切变形, 都会引起齿顶点相对于齿根的周向位移, 这里统称为弯曲变形。

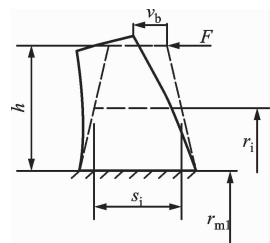


图 5 齿体弯曲变形

Fig. 5 Bending deformation of tooth body

齿顶点外力 F 做功产生图 5 所示的弯曲变形, 由能量法得受力点的周向位移

$$v_b = \int_0^h \frac{12Fx^2}{Ebs_i^3} dx \quad (17)$$

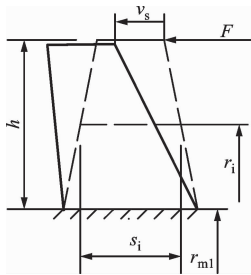


图 6 齿体剪切变形

Fig. 6 Shear deformation of tooth body

式中： s_i 为轮齿任意圆齿厚； b 为齿宽。

对于渐开线齿廓， $s_i = sr_i/r - 2r_i(\text{inv}(\alpha_i) - \text{inv}(\alpha))$ ， $\text{inv}(\alpha_i) = \tan\alpha_i - \alpha_i$ ，变位后的分度圆齿厚 $s = m(\pi/2 + 2x_1 \tan\alpha)$ ， x_1 为变位系数， r_i 为轮齿任意圆半径， α_i 为任意圆压力角， α 为分度圆压力角。

F 做功的同时也会产生如图 6 所示的齿体剪切变形，由能量法可得

$$\frac{1}{2}Fv_s = \frac{1}{2}\int_0^h \frac{KF}{GA(x)}dx \quad (18)$$

式中： $A(x) = bs_i$ 为变截面齿的横截面面积； K 为剪切因子，按照矩形截面梁， K 取 1.5。

可得周向力 F 作用下齿顶点相对于齿根的周向位移

$$v_s = \int_0^h \frac{K}{GA(x)}dx \quad (19)$$

2 柔轮啮合点的周向刚度

啮合点的周向刚度定义为对称两啮合点产生周向单位位移所需的一对周向力的大小。作用在啮合点上的一对周向力，不仅引起受力齿的齿体变形，同时也会使筒体各部位产生扭转变形。用 k_1 和 k_2 分别表示柔轮筒扭转变形对应的扭转刚度和齿体变形对应的扭转刚度，则

$$\left. \begin{aligned} k_1 &= \frac{T}{\theta_a + \theta_c + \theta_t + \theta_g + \theta_d} \\ k_2 &= \frac{F}{v_r + v_b + v_s} \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

由啮合点变形的叠加关系得

$$\frac{1}{k_\theta} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \quad (21)$$

可得柔轮啮合点的周向刚度

$$k_\theta = \frac{2k_1k_2r_a^2}{k_1 + 2k_2r_a^2} = k_1 \frac{1}{1 + k_1/(2k_2r_a^2)} \quad (22)$$

3 负载周向变形的数值验证

为验证本文啮合点周向位移和周向刚度的理论

公式，在 ANSYS 环境中，按表 1 数据，用实体单元 SOLID45 建立实体单元渐开线齿廓的柔轮有限元模型，如图 7 所示。

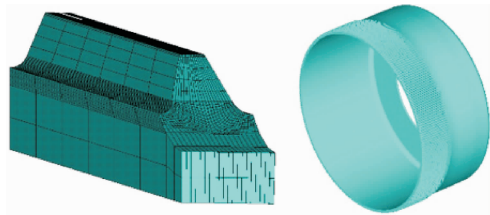


图 7 单个齿体和柔轮实体单元有限元模型

Fig. 7 FE models of single tooth and flexspline with solid element

表 1 柔轮的结构参数

Table 1 Structural parameters of the flexspline

参数	取值	参数	取值
E/GPa	210	δ_1/mm	0.435
$\alpha/(\text{^\circ})$	2	δ_2/mm	0.435
μ	0.3	δ_3/mm	0.700
x_1	2.128 6	b/mm	12.780
m/mm	0.253 6	d_k/mm	30.000
z_1	240	d_s/mm	60.000
l_1/mm	15.18	r_1/mm	0.652 5
l_2/mm	1.969 3	r_2/mm	7.450
s/mm	0.791	r_a/mm	31.174
h/mm	0.824	r/mm	29.570

谐波齿轮传动是基于波发生作用下柔轮装配变形的基础上实现动力传动。装配前，柔轮的原始剖面呈圆形。装配后，波发生器迫使柔轮变为非圆形，其长轴端的齿与刚轮齿完全啮合，短轴处的齿则完全脱开。1.1 节中理论公式未考虑柔轮的装配变形，为与理论公式对应，定义如下计算条件。

(1)筒体未装配解：在未装配的柔轮有限元模型的前截面的齿顶施加均布周向力，计算柔轮筒体各部分的变形。

(2)筒体装配解：在柔轮有限元模型装配变形后的前端面长轴齿顶施加一对单位周向力，定义负载周向位移为施加周向力前后柔轮筒体各部分的周向位移差，其平均值为装配解。

(3)齿体均值解：在装配变形后的柔轮有限元模型长轴齿顶，前中后 3 个截面各施加 1/3 的周向力，计算齿体弯曲变形和齿根转动。将其平均值定义为均值解。

3.1 未变形筒体的扭转变形验证

定义柔轮杯底倒圆两侧截面、齿圈前后端面及其过渡段后端面等横截面上的周向路径。在未装配的柔轮有限元模型的柔轮齿顶施加均布周向力(半周上的周向力代数和等于 1),杯底内孔固定,求解均布周向力作用下柔轮筒体变形的有限元结果。分别提取筒体各部分的周向位移,即未装配解如图 8 所示。图中显示筒体各组成部分周向位移的未装配解沿周向均匀分布。

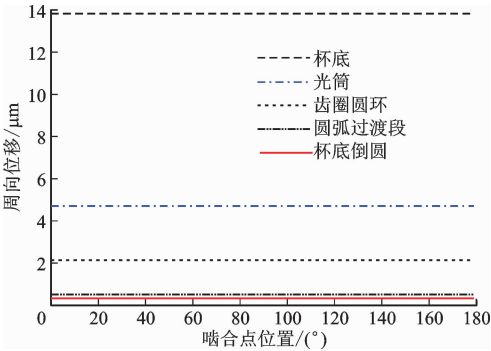


图 8 均布周向力作用下未装配有限元模型的筒体周向位移

Fig. 8 Circumferential displacement of cylinder with unassembled FEM under uniform circumferential force

将图 8 有限元结果分别与式(9)、式(10)、式(12)、式(14)和式(15)的理论解进行比较,结果如表 2 所示。表 2 中的相对偏差为理论解减去未装配解与理论解的比值。

表 2 筒体周向位移的理论解与有限元解的比较

Table 2 A comparison between theoretical and FEM solutions for circumferential displacement of flexspline cylinder

筒体部件	筒体周向位移/nm		相对偏差/%
	理论解	未装配解	
杯底	13.78	13.84	-0.4
光筒	4.69	4.69	0.0
齿圈圆环	2.44	2.15	135.0
圆弧过渡段	0.52	0.51	2.0
杯底倒圆	0.32	0.29	103.0
总和	21.75	21.48	13.0

在柔轮筒体各部分的变形中,齿圈圆环偏差最大为 13.5%,这是由于理论解未考虑轮齿的影响。杯底倒圆的偏差次之为 10.3%,是由于倒圆尺寸较小,网格较粗引起的。这两项变形在总变形中的占

比较小,故理论解与未装配解的总变形偏差为 1.3%,吻合良好。

3.2 装配变形后筒体的扭转变形验证

建立波发生器外表面与柔轮内壁的面面接触关系,求解装入波发生器后的柔轮装配变形。柔轮 1/4 有限元装配模型的径向位移如图 9 所示。波发生器装入使柔轮齿圈变形为椭圆形,长轴处的最大径向位移为 0.311 2 mm,短轴处最小径向位移为 0.300 7 mm。

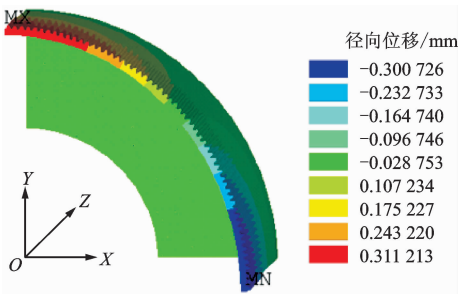


图 9 柔轮有限元装配模型的径向位移

Fig. 9 Radial displacement with finite element assembly model of flexspline

为模拟实际传动负载工况,反映柔轮传动状态时的负载周向变形和啮合点的周向刚度。在装配变形后的柔轮有限元模型的齿圈前截面长轴处齿顶施加一对单位周向力,求得施加周向力前后有限元模型的各部分的周向位移差,即周向力引起的负载周向位移如图 10 所示。图 10 中啮合点位置 90°、270°为长轴,0°、180°为短轴。

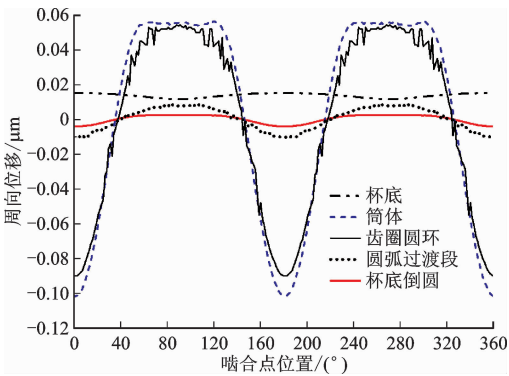


图 10 单位周向力作用下有限元装配模型的柔轮筒体周向位移

Fig. 10 Circumferential displacement of flexspline cylinder with assembled FEM under unit circumferential force

受柔轮装配变形的影响,图 10 中柔轮各部分的负载周向位移随啮合点位置呈现周期波动,以 180°

为周期,长轴处为正,短轴处为负。由于波发生器安装在柔轮齿圈处,故装配变形对柔轮齿圈和光筒的负载周向位移影响最大,对杯底的影响最小。由于轮齿的影响,齿圈的负载周向位移出现局部波动现象。

对图 10 中柔轮各部分的负载周向位移求平均值,即为周向力作用下负载周向位移的装配解,其与理论解的比较如表 3 所示。相对偏差为理论解减去装配解与理论解的比值。由表 3 可知,因装配变形的影响,齿圈圆环的偏差最大为 87%。引起偏差的原因:①波发生器引起的装配变形的影响;②轮齿的影响。理论解未考虑轮齿,有限元模型中的轮齿增大了齿圈刚度。

表 3 简体各部分周向位移的理论解与有限元模型装配解的比较

Table 3 A comparison between theoretical solution and FEM assembly solution of circumferential displacement of cylinder

简体部件	周向位移/nm		相对 偏差/%	变形 占比/%
	理论解	装配解		
杯底	13.78	13.81	—1	63.25
光筒	4.69	3.78	24	21.58
齿圈圆环	2.44	1.30	87	11.19
圆弧过渡段	0.52	0.50	4	2.38
杯底倒圆	0.32	0.25	28	1.47
总和	21.75	196.40	11	100.00

由表 3 可见:光筒的有限元装配模型的计算偏差较大为 24%,主要由装配变形引起;总变形的理论解与装配解偏差为 11%,相比简体未装配解,装配变形增加了柔轮筒体的刚度,使其负载周向变形减小了约 10%。

为反映周向力作用下柔轮简体扭转变形中各部分变形的占比,表 3 最后一列是理论解给出的各部分变形在整个简体变形中的占比。其中杯底变形占比最大 63.25%,其次为光筒 21.58%,齿圈圆环 11.19%;圆弧过渡段 2.38%,倒角 1.47%。数据表明:周向力作用下杯底变形占比大,杯底对柔轮筒体的扭转刚度的影响最大,要提高柔轮筒体的扭转刚度,增大杯底厚度的效果最为显著,其次是增大光筒的厚度。

3.3 齿体变形的验证

为验证周向力作用下柔轮齿体变形的理论公式,在装配变形后的柔轮有限元模型上,沿齿宽前中

后 3 个截面施加 1/3 的周向力模拟齿体理论计算的周向力分布工况。求解齿体的齿根转动和齿体弯曲变形,得到齿体变形产生的齿顶周向位移。对各项变形求其各截面位移的平均值作为均值解。与式(16)、式(17)和式(19)周向位移的理论解进行比较,如表 4 所示。表中相对偏差为理论解减去有限元模型均值解与理论解的比值。

表 4 齿体变形的理论解与有限元均值解比较
Table 4 A comparison between theoretical solution and mean value solution of FEM for tooth deformation

求解类型	转动变形/nm	弯曲变形/nm	总变形/nm
理论解	7.05	29.47	36.52
有限元均值解	7.74	28.00	35.74
相对偏差/%	—9.9	5.3	2.2

由表 4 可以看出,齿根转动引起的周向位移的理论解小于有限元均值解,弯曲变形大于有限元均值解,但总变形的理论解与有限元均值解偏差为 2.2%,吻合良好。表明齿体变形的理论公式准确地揭示了柔轮齿体的负载变形。理论公式求得的齿体变形中,齿体弯曲占比最大 93.18%,转动变形占比只有 6.82%。

4 啮合点周向刚度的数值计算

根据表 3 周向力作用下柔轮简体各部分周向位移的理论解和装配解,分别计算各部分所对应的转角位移,代入式(20)求解,得到柔轮简体扭转刚度 k_1 的理论解和有限元解。将表 4 中齿体弯曲变形和齿根转动的理论解和有限元均值解代入式(20),分别得到齿体的折算扭转刚度 k_2 的理论解和有限元解,并依据式(22)求得柔轮啮合点的周向刚度 k_θ ,见表 5,表中相对偏差为理论解减去有限元解与理论解的比值。由表 5 看出:柔轮简体刚度和齿体刚度的理论解都小于有限元解。齿体扭转刚度 k_2 的理论解与有限元解的偏差为 2%;简体刚度 k_x 的理论解与有限元解的偏差—9%,这是由于有限元模型的轮齿增大了结构刚度。啮合点的周向刚度理论解略小于有限元解,偏差为—5%。表明本文理论公式可以很好地反映柔轮啮合点的周向刚度。

柔轮啮合点的周向刚度与谐波齿轮传动的弹性回差成反比。因此,谐波齿轮设计中,增大啮合点的周向刚度,有助于减小谐波齿轮的弹性回差。由啮合点的变形叠加关系,表 5 所示的周向力作用下的简体和齿体变形叠加后的啮合点的周向刚度都会小

于单项的筒体刚度或齿体刚度;且柔轮筒体刚度大,齿体刚度相对较小。相对较小的柔轮齿体刚度会引起啮合点刚度下降。要提升柔轮啮合点的周向刚度,应增大齿体刚度。

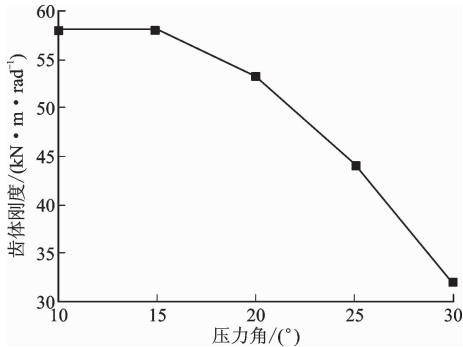
表 5 周向刚度的理论解与有限元模型解比较
Table 5 A comparison between theoretical solution and FEM solution for circumferential stiffness

求解 类型	$k_1 /$ ($\text{N} \cdot \text{m} \cdot \text{rad}^{-1}$)	$k_2 /$ ($\text{N} \cdot \text{m} \cdot \text{rad}^{-1}$)	$k_\theta /$ ($\text{N} \cdot \text{m} \cdot \text{rad}^{-1}$)
理论解	85 488.76	53 221.15	32 800.90
有限元解	94 512.52	54 382.67	34 519.87
偏差/%	-9	-2	-5

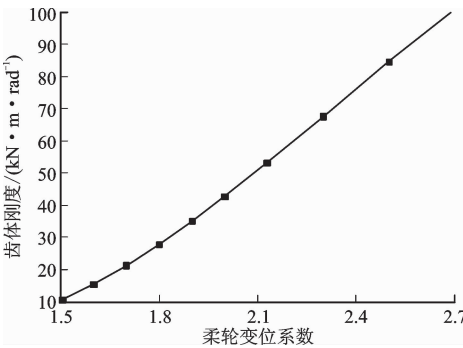
5 齿体参数对齿体刚度的影响

谐波齿轮传动齿数多、模数小,通常采用较大的压力角或正变位来保证啮合区边界上有足够的侧隙,避免齿顶干涉。常用的轮齿参数主要包括:压力角、变位系数、齿宽。为增大齿体刚度,下面分别分析这 3 个齿形参数对齿体刚度的影响。

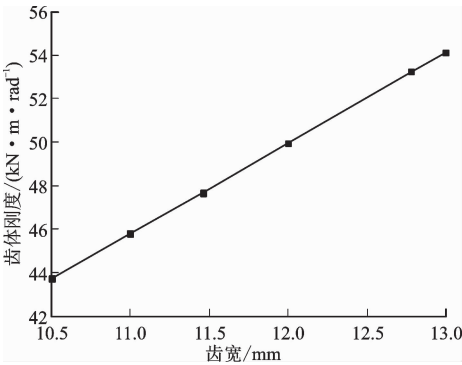
图 11 为齿体弯曲刚度随压力角、变位系数和齿宽的变化规律。由图 11 看出:随着压力角的增大,齿体刚度显著下降;随着柔轮变位系数的增大,齿体刚度也随之增大;随着齿宽的增大,齿体刚度呈线性增大。变位系数的增大对齿体刚度的提高影响最大。



(a)压力角的影响



(b)柔轮变位系数的影响



(c)齿宽的影响

图 11 齿体参数对齿体刚度的影响

Fig. 11 Influence of tooth parameters on tooth stiffness

6 结 论

(1)提出周向力作用下柔轮各部分周向变形和柔轮啮合点周向刚度的理论公式,研究表明理论公式能准确反映柔轮啮合点的周向刚度。

(2)柔轮筒体负载周向位移中,杯底变形占比最大;齿体变形中,齿体弯曲变形占比最大。

(3)柔轮装配变形和轮齿对齿圈圆环和光筒的负载周向位移影响大,使得这两个部分的负载周向位移的理论解大于有限元解。

(4)柔轮筒体的刚度大,齿体刚度小。相对较小的柔轮齿体刚度会引起柔轮啮合点刚度下降。可通过减小压力角、增大变位系数和齿宽,提高齿体刚度。

参考文献:

[1] 沈允文,叶庆泰. 谐波齿轮传动的理论和设计 [M]. 北京:机械工业出版社,1985:2-33.

[2] 伊万诺夫. 谐波齿轮传动 [M]. 沈允文,李克美,译. 北京:国防工业出版社,1987:7-12.

[3] LÓPEZ-MARTÍNEZ J, BLANCO-CLARACO J L, GARCÍA-VALLEJO D, et al. Design and analysis of a flexible linkage for robot safe operation in collaborative scenarios [J]. Mechanism and Machine Theory, 2015, 92: 1-16.

[4] RUDERMAN M, BERTRAM T, IWASAKI M. Modeling, observation, and control of hysteresis torsion in elastic robot joints [J]. Mechatronics, 2014, 24(5): 407-415.

[5] 马东辉,吴嘉宁,阎绍泽. 谐波齿轮传动系统中动力学模型的研究进展 [J]. 中国科技论文, 2015, 10 (16): 1983-1990.

MA Donghui, WU Jianing, YAN Shaoze. Advances in researches of dynamic models in harmonic drive system

- [J]. China Sciencepaper, 2015, 10(16): 1983-1990.
- [6] HU Qiushi, LIU Zhifeng, YANG Congbin, et al. Research on dynamic transmission error of harmonic drive with uncertain parameters by an interval method [J]. Precision Engineering, 2021, 68: 285-300.
- [7] JIA Hang, LI Junyang, XIANG Guo, et al. Modeling and analysis of pure kinematic error in harmonic drive [J]. Mechanism and Machine Theory, 2021, 155: 104122.
- [8] LI Xinzi, SONG Chaosheng, YANG Yong, et al. Optimal design of wave generator profile for harmonic gear drive using support function [J]. Mechanism and Machine Theory, 2020, 152: 103941.
- [9] 石照耀, 徐航, 韩方旭, 等. 精密减速器回差测量的现状与趋势 [J]. 光学精密工程, 2018, 26(9): 2150-2158.
- SHI Zhaoyao, XU Hang, HAN Fangxu, et al. Current status and trends in precision reducer lost motion measurement [J]. Optics and Precision Engineering, 2018, 26(9): 2150-2158.
- [10] DHAOUADI R, GHORBEL F H. Modelling and analysis of nonlinear stiffness, hysteresis and friction in harmonic drive gears [J]. International Journal of Modelling and Simulation, 2008, 28(3): 329-336.
- [11] 勾芳芳, 吕勇. 精密谐波齿轮输出轴端扭转刚度测试与分析 [J]. 机械传动, 2013, 37(4): 91-94.
- GOU Fangfang, LÜ Yong. Test and analysis of torsional stiffness on output shaft of precision harmonic gear [J]. Journal of Mechanical Transmission, 2013, 37(4): 91-94.
- [12] 谭晶, 黄炜灵, 黄迪山, 等. 谐波减速器的扭转刚度试验研究 [J]. 计量与测试技术, 2019, 46(4): 3-5.
- TAN Jing, HUANG Weiling, HUANG Dishan, et al. Experimental study on torsional stiffness of harmonic reducer [J]. Metrology & Measurement Technique, 2019, 46(4): 3-5.
- [13] 唐小欢, 王湘江, 冯栋彦. 谐波减速器输入轴迟滞曲线的特性研究 [J]. 机械传动, 2016, 40(8): 29-32.
- TANG Xiaohuan, WANG Xiangjiang, FENG Dongyan. Study on hysteresis curve characteristic of input shaft of harmonic reducer [J]. Journal of Mechanical Transmission, 2016, 40(8): 29-32.
- [14] 辛洪兵, 何惠阳, 谢金瑞. 谐波齿轮传动啮合刚度的研究 [J]. 光学精密工程, 1997, 5(2): 27-30.
- XIN Hongbing, HE Huiyang, XIE Jinrui. Research on meshing stiffness of harmonic drive [J]. Optics and Precision Engineering, 1997, 5(2): 27-30.
- [15] 郇黎伟, 范元勋, 罗明. 谐波传动柔轮扭转刚度的研究 [J]. 机械制造与自动化, 2012, 41(3): 6-8.
- LI Liwei, FAN Yuanxun, LUO Ming. Research on torsion stiffness of flexspline in harmonic gear [J]. Machine Building & Automation, 2012, 41(3): 6-8.
- [16] 潘锋, 董海军, 孙敬. 谐波齿轮传动中柔轮扭转变形产生的回差分析 [J]. 机械科学与技术, 2009, 28(6): 811-813, 818.
- PAN Feng, DONG Haijun, SUN Jing. Analysis of backlash from flexspline torsional deformation in harmonic gearing [J]. Mechanical Science and Technology for Aerospace Engineering, 2009, 28(6): 811-813, 818.
- [17] 韦乐余, 王长路, 张立勇, 等. 谐波齿轮啮合刚度的有限元分析 [J]. 机械传动, 2018, 42(6): 144-147, 150.
- WEI Leyu, WANG Changlu, ZHANG Liyong, et al. Finite element analysis of meshing stiffness of harmonic gear [J]. Journal of Mechanical Transmission, 2018, 42(6): 144-147, 150.
- [18] 崔博文, 沈允文. 用有限元法研究谐波齿轮传动齿间啮合力的分布规律 [J]. 机械传动, 1997, 21(1): 7-9.
- CUI Bowen, SHEN Yunwen. Study on load distribution in gear of harmonic drive by finite element method [J]. Journal of Mechanical Transmission, 1997, 21(1): 7-9.
- [19] 陈晓霞, 杨朋朋, 邢静忠, 等. 谐波齿轮负载侧隙和啮合力分布规律研究 [J]. 西安交通大学学报, 2018, 52(7): 9-17.
- CHEN Xiaoxia, YANG Pengpeng, XING Jingzhong, et al. Research on distribution of loading backlash and meshing force of harmonic drive [J]. Journal of Xi'an Jiaotong University, 2018, 52(7): 9-17.
- [20] 牛洪波. 谐波齿轮传动的啮合刚度分析及啮合力分布规律研究 [D]. 天津: 天津工业大学, 2020: 11-21.

(编辑 刘杨)