

考虑空穴效应的广义特征分解法解雷诺方程

耿煜, 郭振, 陈渭

(西安交通大学现代设计及转子轴承系统教育部重点实验室, 710049, 西安)

摘要: 针对目前油膜力模型空穴效应考虑不充分、计算速度优势不明显等问题, 基于广义特征分解法(PGD), 采用雷诺边界条件, 提出了一种考虑空穴效应的动载有限长滑动轴承非线性油膜力模型, 并给出了详细的求解方法与流程。数值算例表明, 与传统的有限差分法(FDM)相比, 基于新模型方法的油膜力计算速度最快可以提高近 5 倍, 最低相对误差可以控制在 1% 以内, 证明了所提方法的准确性与高效性。含润滑间隙铰接副的动力学分析依赖于对雷诺方程数十万次的求解, 精度与效率往往不可兼得, 在曲柄滑块多体系统中引入新计算模型, 计算结果表明, 在 30×30 和 40×40 的网格密度下, 与传统有限差分法相比, 基于新模型方法的单个计算周期所节省时间分别高达 6 min 和 20 min, 证明了所提方法的可靠性和工程应用价值。

关键词: 广义特征分解法; 非线性油膜力; 雷诺边界条件; 含润滑间隙铰接副

中图分类号: TH117.2; TH133.3 **文献标志码:** A

DOI: 10.7652/xjtuxb202103013 **文章编号:** 0253-987X(2021)03-0109-08



OSID 码

Proper Generalized Decomposition Method Considering Cavitation Effect for Solving Reynolds Equations

GENG Yu, GUO Zhen, CHEN Wei

(Key Laboratory of Education Ministry for Modern Design and Rotor-Bearing System,
Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China)

Abstract: Based on the proper generalized decomposition (PGD) method, a calculation model with Reynolds boundary conditions for solving nonlinear oil film forces of finite length journal sliding bearing is established and the detailed solving process and method are proposed. The results show that compared with the FDM, the calculation speed can be increased by 4 times, and the relative error is controlled within 1%, which proves the accuracy and efficiency of the model. The dynamic analysis of lubricated clearance joints depends on the solution of Reynolds equation and the accuracy and efficiency can't be satisfied simultaneously. The developed calculation model is applied to a multibody system with lubricated clearance joints and the results show that the new model can save 6 minutes and 20 minutes, respectively, in a single operation cycle under the grid density of 30×30 and 40×40 compared with the FDM, which proves the model's feasibility and engineering application value.

Keywords: proper generalized decomposition; nonlinear fluid film force; Reynolds boundary condition; lubricated clearance joints

铰接副作为必要的连接部件在机械系统中广泛应用,由于受到加工误差、材料变形、磨损等因素的影响,铰接副大多存在间隙,导致机构连接处发生碰撞、振动,加快铰接副的磨损,因此间隙铰接副通常依靠润滑将不利影响降到最低。

滑动轴承非线性油膜力模型是含润滑间隙铰接副多体系统动力学特性分析与研究的基础和关键,油膜力的计算精度和速度将直接影响非线性动力学特性分析的效率。目前关于油膜力模型的研究已取得很大进展,涌现出了多种求解非线性油膜力的理论与方法,其中应用较为普遍的为有限差分法(FDM)^[1-4]和有限元法(FEM)^[5-8]。虽然数值方法精度高,但是计算效率很低,因此运用近似解析法求解油膜力的研究日渐增多,目前滑动轴承非线性油膜力近似解表达式主要有无限短轴承假设下的 Capone 模型^[9]和 Sommerfeld 提出的无限长轴承油膜力模型^[10],但是考虑到油膜的温升和端泄,滑动轴承的宽径比通常在 0.8~1.0 之间^[11],现实中较少存在无限短或无限长轴承,实际应用受到限制,近年来,很多学者针对有限长轴承做了相当多的工作。Chasalevris 等基于油膜假设,利用变分原理求出有限长轴承非线性油膜力的近似解析解,但是并没有考虑空穴效应^[12-14]。在流体润滑问题中,由于发散间隙的存在会导致油膜出现负压,当油膜达到最大可承受负压时会发生破裂现象,进而产生空穴,所以不考虑空穴效应所获得的油膜力是不可靠的^[14]。张永芳等基于下游雷诺边界条件,运用变分原理和分离变量法提出了一种针对有限长轴承的近似解析解方法,计算精度较高,但是计算速度相比传统有限差分法并没有得到很大的提升^[11,15]。除此之外,还有诸如数据库法和精确解析法等油膜力计算模型,但是由于通用性不强、计算效率较低等问题,并不适合于一般性径向滑动轴承油膜力的求解。因此,建立考虑空穴效应、通用性较高、计算速度较快的滑动轴承非线性油膜力模型对于提高含润滑间隙铰接副多体系统动力学分析效率和满足实际工程应用至关重要。

广义特征分解法(PGD)主要是通过将求解域转变为张量积函数之和来减少待求未知量个数,从而有效提高计算效率。将待求函数 u 分解为 N 维 Q 个张量积之和的形式,表达式如下

$$u(x_1, \dots, x_Q) = \sum_N \prod_Q f_{ij}(x_j) \quad (1)$$

使用 M 个自由度对每个张量进行离散,待求未

知量有 NQM 个,而如果使用传统的 FEM 法或 FDM 法,待求未知量则为 M^N 个。Amine 等第一次使用 PGD 法对偏微分方程进行求解^[16];Dumon 等将 PGD 法成功应用到流体力学领域,并证明了 PGD 法的高效性^[17];Tamellini 等使用 PGD 法对稳态不可压缩 Navier-Stokes 方程进行求解^[18-19];Cherabi 等使用 PGD 法求解稳态工况下的雷诺方程^[20],但是并没有考虑空穴对油膜力分布的影响,实际应用具有一定的局限性。

本文针对含润滑间隙铰接副中油膜力的计算问题,在文献[20]的基础上,建立了动载滑动轴承非线性油膜力的 PGD 计算模型,并引入雷诺边界条件,充分考虑空穴效应对油膜力分布的影响。利用 Matlab 数值计算验证了模型的高效性和稳定性,明晰了 PGD 法的适用范围。将模型引入到含润滑间隙铰接副多体系统的计算中去,解决了模型的收敛问题,证明了模型的可靠性和工程应用价值。

1 计算模型的建立

1.1 动载雷诺方程

动载雷诺方程如下式

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(h^3 \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(h^3 \frac{\partial p}{\partial z} \right) = 6\mu U \frac{\partial h}{\partial x} + 12\mu \frac{\partial h}{\partial t} \quad (2)$$

可以将雷诺方程转换为以下的形式

$$\frac{\partial h^3}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial x} + h^3 \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + h^3 \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = 6\mu U \frac{\partial h}{\partial x} + 12\mu \frac{\partial h}{\partial t} \quad (3)$$

即

$$3h^2 \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial x} + h^3 \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + h^3 \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = 6\mu U \frac{\partial h}{\partial x} + 12\mu \frac{\partial h}{\partial t} \quad (4)$$

将式(5)代入式(4),得

$$\partial x = R\partial\theta; U = R\omega \quad (5)$$

可得到式(4)圆柱坐标系下的表达式

$$\frac{3p}{hR^2} \frac{\partial h}{\partial \theta} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 p}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = \frac{6\mu\omega}{h^3} \frac{\partial h}{\partial \theta} + \frac{12\mu}{h^3} \frac{\partial h}{\partial t} \quad (6)$$

油膜厚度表达式如下

$$h = c(1 + \epsilon \cos\theta) \quad (7)$$

式中: θ 为周向坐标; z 为轴向坐标; h 为油膜厚度; R 为轴承半径; μ 为润滑油黏度; ω 为旋转角速度; c 为半径间隙; ϵ 为偏心率。

1.2 PGD 求解雷诺方程

将雷诺方程式(6)转换为等效积分的弱形式,若对于任意的权函数 p' 下式成立

$$\iint_{\Omega_\theta \times \Omega_y} p' \left(\frac{3}{hR^2} \frac{\partial h}{\partial \theta} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 p}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} - \frac{6\mu\omega}{h^3} \frac{\partial h}{\partial \theta} - \frac{12\mu}{h^3} \frac{\partial h}{\partial t} \right) d\theta dz = 0 \quad (8)$$

则式(6)成立。

将油膜力函数 p 进行分解, 获得其近似解

$$p(\theta, z) = \sum_{i=1}^N X_i(\theta) Y_i(z) \quad (9)$$

式中: i 为当前维数; X_i 和 Y_i 为第 i 维度下周向和轴向方向向量。一般情况下, 维数越多, 近似解越逼近精确解。

采用变方向迭代策略, 式(9)转换为

$$p^{n,q}(\theta, z) = \sum_{i=1}^{n-1} X_i(\theta) Y_i(z) + X_n^q(\theta) Y_n^{q-1}(z) \quad (10)$$

式中: q 为当前维数下的迭代次数; $X_n^q(\theta)$ 和 $Y_n^{q-1}(z)$ 为第 n 维度下第 q 次迭代和第 $q-1$ 次迭代获得的周向和轴向方向向量。

为了方便计算, 将权函数 p' 设为

$$p'(\theta, z) = X_n^*(\theta) Y_n^{q-1}(z) \quad (11)$$

将式(10)(11)代入式(8), 得

$$\begin{aligned} & \iint \left[X_n^*(\theta) Y_n^{q-1}(z) \left(G_1(\theta) \frac{dX_n^q(\theta)}{d\theta} Y_n^{q-1}(z) + \frac{1}{R^2} \frac{d^2 X_n^q(\theta)}{d\theta^2} Y_n^{q-1}(z) + X_n^q(\theta) \frac{d^2 Y_n^{q-1}(z)}{dz^2} + \right. \right. \\ & G_1(\theta) \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{dX_i(\theta)}{d\theta} Y_i(z) \right) + \frac{1}{R^2} \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{d^2 X_i(\theta)}{d\theta^2} Y_i(z) \right) + \\ & \left. \left. \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{d^2 Y_i(z)}{dz^2} X_i(\theta) \right) - G_2(\theta) - G_3(\theta) \right) \right] d\theta dz = 0 \end{aligned} \quad (12)$$

将式(12)进行整理, 得

$$\begin{aligned} & \int X_n^*(\theta) \left(A_\theta G_1(\theta) \frac{dX_n^q(\theta)}{d\theta} + \frac{1}{R^2} A_\theta \frac{d^2 X_n^q(\theta)}{d\theta^2} + \right. \\ & X_n^q(\theta) B_\theta + G_1(\theta) \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{dX_i(\theta)}{d\theta} C_\theta \right) + \\ & \left. \frac{1}{R^2} \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{d^2 X_i(\theta)}{d\theta^2} C_\theta \right) + \sum_{i=1}^{n-1} (D_\theta X_i(\theta)) - E_\theta - F_\theta \right) d\theta \\ & = 0 \end{aligned} \quad (13)$$

其中

$$\begin{aligned} G_1(\theta) &= \frac{3}{hR^2} \frac{\partial h}{\partial \theta} \\ G_2(\theta) &= \frac{6\mu\omega}{h^3} \frac{\partial h}{\partial \theta} \\ G_3(\theta) &= \frac{12\mu}{h^3} \frac{\partial h}{\partial t} \end{aligned}$$

$$A_\theta = \int [Y_n^{q-1}(z)]^2 dz$$

$$B_\theta = \int [Y_n^{q-1}(z)] \frac{d^2 Y_n^{q-1}(z)}{dz^2} dz$$

$$C_\theta = \int [Y_n^{q-1}(z)] Y_i(z) dz$$

$$D_\theta = \int [Y_n^{q-1}(z)] \frac{d^2 Y_i(z)}{dz^2} dz$$

$$E_\theta = \int [Y_n^{q-1}(z)] G_2(\theta) dz$$

$$F_\theta = \int [Y_n^{q-1}(z)] G_3(\theta) dz$$

将式(13)进一步化简, 得

$$\begin{aligned} & A_\theta G_1(\theta) \frac{dX_n^q(\theta)}{d\theta} + \frac{1}{R^2} A_\theta \frac{d^2 X_n^q(\theta)}{d\theta^2} + X_n^q(\theta) B_\theta + \\ & G_1(\theta) \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{dX_i(\theta)}{d\theta} C_\theta \right) + \frac{1}{R^2} \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{d^2 X_i(\theta)}{d\theta^2} C_\theta \right) + \\ & \sum_{i=1}^{n-1} (D_\theta X_i(\theta)) - E_\theta - F_\theta = 0 \end{aligned} \quad (14)$$

通过 rand 函数对 $Y_n^{q-1}(z)$ 赋予随机初值, 数值迭代计算出 $X_n^q(\theta)$, 同理, 通过已计算得出的 $X_n^q(\theta)$ 计算 $Y_n^q(z)$ 。

式(10)、式(11)转换为

$$p^{n,q}(\theta, z) = \sum_{i=1}^{n-1} X_i(\theta) Y_i(z) + X_n^q(\theta) Y_n^q(z) \quad (15)$$

$$p'(\theta, z) = X_n^q(\theta) Y_n^*(z) \quad (16)$$

将式(15)(16)代入式(8), 得

$$\begin{aligned} & \iint \left[X_n^q(\theta) Y_n^*(z) \left(G_1(\theta) \frac{dX_n^q(\theta)}{d\theta} Y_n^q(z) + \frac{1}{R^2} \frac{d^2 X_n^q(\theta)}{d\theta^2} Y_n^q(z) + X_n^q(\theta) \frac{d^2 Y_n^q(z)}{dz^2} + \right. \right. \\ & G_1(\theta) \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{dX_i(\theta)}{d\theta} Y_i(z) \right) + \frac{1}{R^2} \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{d^2 X_i(\theta)}{d\theta^2} Y_i(z) \right) + \\ & \left. \left. \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{d^2 Y_i(z)}{dz^2} X_i(\theta) \right) - G_2(\theta) - G_3(\theta) \right) \right] d\theta dz = 0 \end{aligned} \quad (17)$$

同理, 将式(17)进行整理, 得

$$\begin{aligned} & \int Y_n^*(z) \left(A_z G_1(\theta) Y_n^q(z) + \frac{1}{R^2} B_z Y_n^q(z) + \right. \\ & C_z \frac{d^2 Y_n^q(z)}{dz^2} + G_1(\theta) \sum_{i=1}^{n-1} (Y_i(z) D_z) + \\ & \left. \frac{1}{R^2} \sum_{i=1}^{n-1} (Y_i(z) E_z) + \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{d^2 Y_i(z)}{dz^2} F_z \right) - G_z - H_z \right) dz \\ & = 0 \end{aligned} \quad (18)$$

其中

$$A_z = \int X_n^q(\theta) \frac{dX_n^q(\theta)}{d\theta} d\theta$$

$$B_z = \int X_n^q(\theta) \frac{d^2 X_n^q(\theta)}{d\theta^2} d\theta$$

$$C_z = \int [X_n^q(\theta)]^2 d\theta$$

$$D_z = \int X_n^q(\theta) \frac{dX_i(\theta)}{d\theta} d\theta$$

$$E_z = \int X_n^q(\theta) \frac{d^2 X_i(\theta)}{d\theta^2} d\theta$$

$$F_z = \int X_n^q(\theta) X_i(\theta) d\theta$$

$$G_z = \int X_n^q(\theta) G_2(\theta) d\theta$$

$$H_z = \int X_n^q(\theta) G_3(\theta) d\theta$$

将式(18)进一步化简,得

$$\begin{aligned} & A_z G_1(\theta) Y_n^q(z) + \frac{1}{R^2} B_z Y_n^q(z) + C_z \frac{d^2 Y_n^q(z)}{dz^2} + \\ & G_1(\theta) \sum_{i=1}^{n-1} (Y_i(z) D_z) + \frac{1}{R^2} \sum_{i=1}^{n-1} (Y_i(z) E_z) + \\ & \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{d^2 Y_i(z)}{dz^2} F_z \right) - G_z - H_z = 0 \end{aligned} \quad (19)$$

1.3 油膜承载力的求解

采用中差分五点差分形式对式(14)(19)进行求解,将求解得到的 $X_i(\theta)$ 、 $Y_i(z)$ 代入式(9),算出油膜力分布函数 p 。

轴承承载力计算公式如下

$$W = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} \quad (20)$$

其中

$$F_x = \iint p R \sin \theta d\theta dz; F_y = \iint p R \cos \theta d\theta dz$$

1.4 边界条件

轴承的端泄边、周期边界和雷诺边界的边界条件分别如下

$$\left. \begin{aligned} p_{z=\pm 1} &= 0 \\ p_{\theta=0} &= p_{\theta=2\pi} \\ p &= p_c, \quad \frac{\partial p}{\partial m} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

雷诺边界条件假定在油膜完整区和油膜破裂区的交界线上压力的法向梯度为0,且压力等于空穴压力 p_c ,本文空穴压力设为0。

在有限差分法中,一般是通过在迭代过程中将压力 $p(\theta, z)$ 小于0的部分设为0来实现雷诺边界条件。在PGD法中,通过对 $X_n^q(\theta)$ 进行操作来实现雷诺边界条件。在第 n 个维度中的第 q 次迭代结束后,采用下式计算当前维度第 q 次迭代后的实时油

膜力

$$p^{n,q}(\theta, z) = \sum_{i=1}^{n-1} X_i(\theta) Y_i(z) + X_n^q(\theta) Y_n^q(z) \quad (22)$$

当 $p^{n,q}(\theta, z) < 0$ 时,将 $X_n^q(\theta)$ 赋值为0。值得注意的是,在计算第 n 个维度的 $X_i(\theta)$ 和 $Y_i(z)$ 时,需要用到前 $n-1$ 个维度的值,而由于施加雷诺边界条件,对前 $n-1$ 个 $X_i(\theta)$ 进行了强制性赋值,破坏了数值的稳定性,导致计算不易收敛,且容易出现数值溢出。经过反复计算发现,当维数设为1时,问题得到了解决,计算精度并不会受到明显影响,并且由于节省了计算量,进一步缩短了计算时间。

1.5 收敛条件

当 ξ_1 小于最大允许误差 λ_1 时,结束当前维度内 $X_n^q(\theta)$ 与 $Y_n^q(z)$ 的迭代求解,进行下一个维度的计算。当 ξ_2 小于最大允许误差 λ_2 或当前计算维度数达到最大允许维度数,结束运算。

ξ_1 和 ξ_2 的计算表达式如下

$$\xi_1 = \frac{|X_n^q(\theta) Y_n^q(z) - X_n^{q-1}(\theta) Y_n^{q-1}(z)|}{|X_n^{q-1}(\theta) Y_n^{q-1}(z)|} \quad (23)$$

$$\xi_2 = \frac{|X_n(\theta) Y_n(z)|}{|X_{n-1}(\theta) Y_{n-1}(z)|} \quad (24)$$

式中: $X_n^q(\theta)$ 、 $Y_n^q(z)$ 为第 n 维度下第 q 次迭代获得的周向和轴向向量; $X_n(\theta)$ 、 $Y_n(\theta)$ 为第 n 维度下经过计算迭代满足 λ_1 后得到的周向和轴向向量。由式(10)可知, ξ_1 、 ξ_2 本质上是对油膜压力的迭代误差计算,为了解决收敛问题,本文设定最大维度为1,即对第2种收敛条件的判定实际上是不需要考虑的。

1.6 计算程序

计算程序的基本流程如下:

- 步骤1 输入3个轴承参数,润滑油黏度、最大允许误差 λ_1 、最大允许维度数 $N=1$;
- 步骤2 划分网格节点,计算油膜厚度分布;
- 步骤3 初始化 $\text{rand}(X_n^{q-1}(\theta))$ 、 $\text{rand}(Y_n^{q-1}(z))$;
- 步骤4 由 $Y_n^{q-1}(z)$ 计算迭代系数 $A_\theta \sim F_\theta$;
- 步骤5 由式(14)计算得 $X_n^q(\theta)$;
- 步骤6 由 $X_n^q(\theta)$ 计算迭代系数 $A_z \sim H_z$;
- 步骤7 由式(19)计算得 $Y_n^q(z)$;
- 步骤8 由式(9)计算当前油膜力分布,若 $p^{n,q}(\theta, z) < 0$,则 $X_n^q(\theta) = 0$;
- 步骤9 由式(21)计算误差 ξ_1 ,如果 $\xi_1 < \lambda_1$,则转到步骤10,否则 $q = q + 1$,重复步骤4~9。
- 步骤10 由式(20)计算轴承承载力,输出油膜压力分布。

2 计算模型的验证

2.1 计算精度的验证

Kumar 和 Booker^[4] 基于 JFO 边界条件,采用有限元法对有限长轴承进行了油膜力求解,已有研究^[21]表明,在偏心率小于 0.02 的情况下,雷诺边界条件和 JFO 边界条件所得到油膜力误差在 5% 以内;当偏心率高于 0.02 时,两种边界条件所得结果几乎一致。因此本文使用文献^[4]的计算参数和结果,来验证基于雷诺边界条件的 PGD 法的准确性,具体的轴承参数意义及数值见表 1。

表 1 文献^[4]中的轴承参数

参数	数值
半径/mm	20
长度/mm	20
半径间隙/ μm	20
润滑油黏度/ $(\text{mP}\cdot\text{s})$	7
偏心率	0.9
转速/ $(\text{r}\cdot\text{min}^{-1})$	2 000
油膜挤压速度/ $(\text{mm}\cdot\text{s}^{-1})$	0
空化压力/kPa	0
环境压力/kPa	100
网格划分	60×30

将有限差分法、有限元法和 PGD 法计算结果与文献^[4]的计算结果进行对比,结果如表 2 所示,文中不作特殊说明 FDM 和 PGD 法均采用中差分五点差分格式进行数值求解。采用 PGD 法得到的油膜承载力和最高压力的结果误差均在 10% 以内。值得注意的是,随着网格密度的加密,PGD 法的计算精度将得到提高,但是相比 FDM 法计算时间得到了大幅缩减,这将在 2.2 节进行验证。另外,将使用 PGD、FDM、FEM 法得出的油膜压力分布图进行比较,如图 1 所示,可以看到图像曲线具有较好的一致性,再一次验证了基于雷诺边界条件的 PGD 法的准确性。

表 2 PGD、FDM、FEM 法与文献^[4]方法的结果对比

方法	承载力 /N	承载力计算 误差/%	最大压力 /MPa	最大压力计算 误差/%
文献 ^[4]	5 668		33.7	
PGD	6 044	6.6	36.6	8.6
FDM	5 925	4.5	35.6	5.6
FEM	5 752	1.5	34.6	2.7

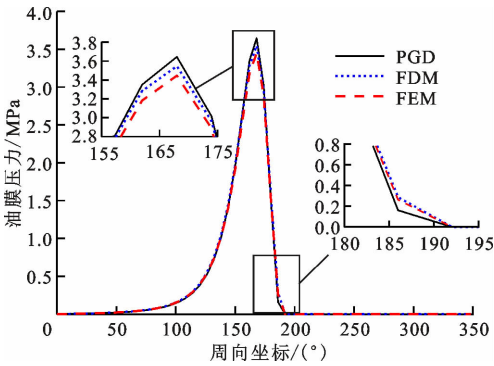


图 1 轴向中心处油膜压力分布图

2.2 计算效率的验证

相比 FDM 法,FEM 法计算精度更高,处理复杂几何结构时适应性强,但是 FDM 法使用简单,在处理一般性滑动轴承方面应用更为广泛,计算效率相比 FEM 法有本质上的提高,且其计算精度已经能够满足一般性工程需要,因此在这里将采用新模型的 FGD 法与 FDM 法进行比较,验证 FGD 法的高效性。

设置相同的最大允许误差 λ_1 和 SOR 迭代因子分别为 10^{-5} 和 1.41,比较 PGD 和 FDM 法在不同网格密度下耗费的计算时间。由于 PGD 法受到初始随机赋值的影响,为了严谨,每种网格密度下的 PGD 计算时间和承载力取 3 次平均值。如表 3 所示,在低网格密度下,PGD 与 FDM 法的相对误差较低,且随着网格密度的增加,误差控制在 1% 以内,计算效率最大可以提高 3.59 倍。在网格密度达到 300×300 以上时,两种方法的计算误差开始突然增大,通过承载力可以看出,FDM 法算出的承载力发生明显突变,而 PGD 法算出的承载力变化较小,这说明在相同的 λ_1 条件下,PGD 法具有更好的计算稳定性,随着网格密度的提高,依旧保持了较高的计算精度,而 FDM 法由于网格密度过高,原有 λ_1 已经无法满足其计算精度的要求,导致结果过早收敛进而使得计算结果发生突变。

为了验证上述结论,在 600×600 的固定网格密度情况下,采用不同的 λ_1 进行了实验,实验结果如表 4 所示。在降低最大允许误差后,PGD 与 FDM 法的相对误差始终控制在 1% 以内,最大加速比达到了 4.42,表明 PGD 法具有相当高的计算精度和效率。结合表 2 和表 3 可以看出,与 FDM 法相比,PGD 法不仅保持了较高的计算精度,而且具有更好的计算稳定性与更快的计算速度,在高网格密度和低允许误差条件下,计算优势将会更加明显。

表 3 不同网格密度下 PGD 和 FDM 法的计算结果对比

网格密度	承载力/N		承载力 计算误差/%	计算时间/s		加速比
	FDM 法	PGD 法		FDM 法	PGD 法	
30×30	5 930	6 324	6.60	0.052	0.049	1.06
40×40	5 940	6 179	4.00	0.082	0.062	1.32
60×60	5 930	6 013	1.40	0.230	0.120	1.92
100×100	5 952	5 984	0.55	1.260	0.610	2.07
200×200	5 915	5 953	0.64	15.90	4.430	3.59
300×300	5 849	5 944	1.61	65.090	19.270	3.38
400×400	5 761	5 931	2.95	169.720	54.430	3.12
500×500	5 654	5 915	4.63	353.410	98.400	3.59
600×600	5 531	5 900	6.68	636.880	178.040	3.58

表 4 不同允许误差下 PGD 与 FDM 法的计算时间对比

允许误差	承载力/N		承载力 计算误差/%	计算时间/s		加速比
	FDM 法	PGD 法		FDM 法	PGD 法	
10 ⁻⁵	5 531	5 900	6.68	637	178.04	3.58
10 ⁻⁶	5 923	5 949	0.44	1 293	314.00	4.12
10 ⁻⁷	5 969	5 955	0.23	2 091	487.00	4.29
10 ⁻⁸	5 974	5 955	0.32	3 033	686.00	4.42

3 PGD 法在含润滑间隙铰接副多体系统中的应用

为了提高含润滑间隙铰接副多体系统的计算效率,符合工业应用所需要的实用性特点,引入模型对含润滑铰接副非线性油膜力进行计算。本文以曲柄滑块为例,曲柄滑块机构见图 2,相关参数见表 5。

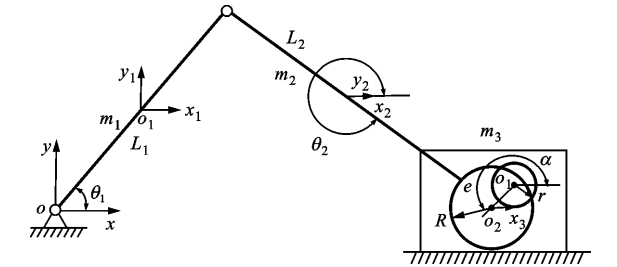


图 2 曲柄滑块机构示意图

表 5 曲柄滑块机构参数

L_1/mm	L_2/mm	M_1/kg	M_2/kg	M_3/kg
50	120	0.3	0.21	0.14

采用欧拉-拉格朗日法对多体系统进行建模,引入 Flores 过渡模型来解决润滑间隙铰接副的工作状态过渡问题,具体参数详见表 6,其中 E 与 μ 表示材料的弹性模量与泊松比。接触力模型与摩擦力模型需要设定恢复系数与摩擦系数,本文分别取为 0.9 和 0.2。Flores 模型过渡临界值设为 $2\text{ }\mu\text{m}$,润

滑油黏度为 $0.08\text{ Pa}\cdot\text{s}$ 。具体的公式与计算步骤在此不作赘述,详见文献[1]。

表 6 间隙铰接副参数

参数	数值
销轴直径/mm	10
轴套内径/mm	9.9
铰接副宽度/mm	20
轴套材料弹性模量/GPa	103
轴套材料泊松比	0.3
轴颈材料弹性模量/GPa	208
轴颈材料泊松比	0.28

在多体系统计算中采用 FDM 法求解雷诺方程时,往往使用上一时刻计算得出的压力分布解作为下一时刻的初始值进行计算加速,使用 PGD 法时同样使用上一次计算出的周向和轴向向量 X_i 、 Y_i 来作为初始值进行计算加速,但是 X_i 、 Y_i 不仅参与迭代,还会影响到迭代系数 $A_\theta\sim F_\theta$ 、 $A_z\sim H_z$ 的计算,因此连续使用上一次计算解作初始解会产生累计误差,导致算法难以收敛,因此需要在一定数量的时间步长后,对初始向量进行新一轮的随机赋值,以消除累计误差对计算所带来的影响。

曲柄转动 3 周,设置相同的 λ_1 为 10^{-5} ,SOR 迭代因子为 1.41,验证 PGD 法在含润滑间隙铰接副多体系统计算中的可靠性与实用性。图 3 为 PGD

与 FDM 法在 30×30 网格密度下的轴心轨迹、最小油膜厚度、滑块速度随时间变化的对比。从图 3 可以看出,PGD 与 FEM 法的计算结果相差不大,滑块速度曲线近乎重合,可见 PGD 法具有较高的计算精度。

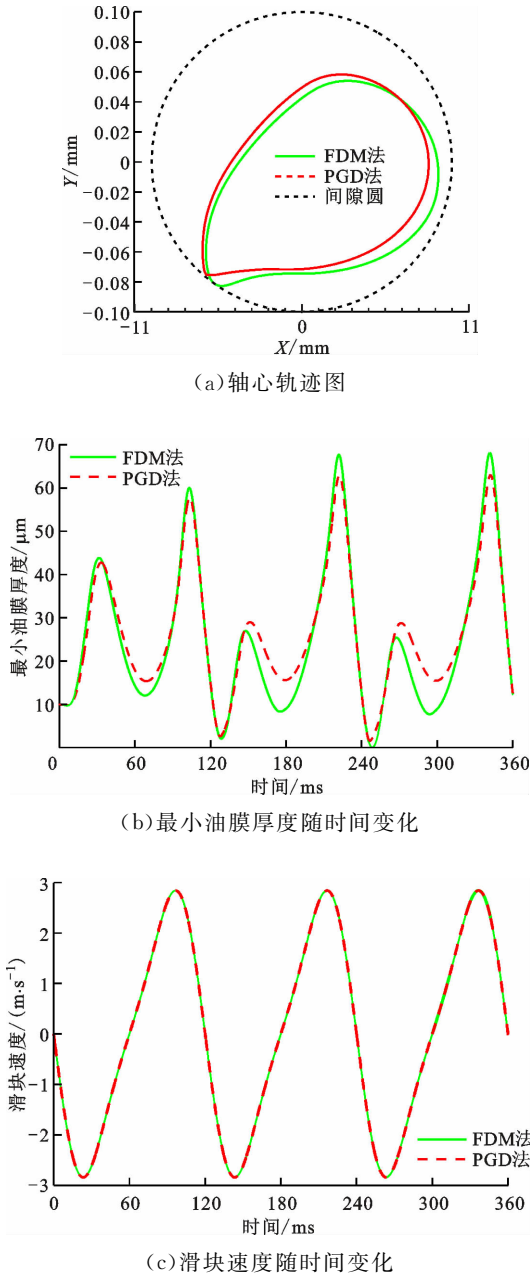


图 3 30×30 网格下 PGD 与 FDM 法的计算结果对比

表 7 为两种方法在不同网格密度下运转 3 个周期的计算时间对比,可以看出 PGD 法对于计算的加速效果是非常明显的,在 30×30 和 40×40 的网格密度下,PGD 法平均一个周期的计算时间分别缩短了 6 min 和 20 min,在实际计算中,为了观察间隙铰接副的润滑效果,至少需要进行 5 个周期的运算,随着机构复杂性的提高,达到稳定润滑状态所需要的周期数会进一步增加,因此采用新模型所节省的时

间将是巨大的。

表 7 在含润滑间隙铰接副多体系统中的
计算时间对比

网格密度	FDM 法计算时间/s	PGD 法计算时间/s
30×30	3 527	2 371
40×40	7 850	4 264

4 结 论

本文基于广义特征分解法建立了动载有限长滑动轴承非线性油膜力模型,引入雷诺边界条件充分考虑空穴对油膜压力分布的影响,与现有文献数据进行对比,证明了新模型的准确性与高效性,并研究了采用新模型方法的计算精度与计算效率随网格密度的变化趋势。以曲柄滑块机构为例,采用新模型的方法对含润滑间隙铰接副进行动力学分析,证明了新模型的实际应用价值。可以得出以下结论:

(1)PGD 法计算编程较为复杂,相较传统计算方法更难理解,但是在较低网格密度下,PGD 法与 FDM 法的承载力计算相对误差最高不超过 7%,在较高网格密度下,相对误差控制在 1% 以内,具有较高的计算精度且稳定性相比 FDM 法更高。

(2)PGD 法计算效率较高,在不损失精度的前提下,在不同网格密度下优势明显,计算速度相比 FEM 法提高 2~5 倍。

(3)使用 PGD 法对润滑间隙铰接副动力学分析,在 30×30 和 40×40 网格密度下,单个运算周期节省时间分别高达 6 min 和 20 min,随着网格密度和机械系统复杂性的提高,新模型的计算优势将会更加显著,证明了模型的可靠性与实用价值。

本文只是将 PGD 法应用于普通雷诺方程的求解,考虑表面粗糙度及温度的影响,例如将 PGD 法引入平均流模型和热弹流计算中是 PGD 法未来的发展方向。本文考虑空穴效应的 PGD 法只是针对普通滑动轴承而言,而对于织构化轴承而言,由于存在大量的收敛、发散间隙,油膜会反复破裂并再形成,这对算法的收敛问题会产生巨大挑战,这是 PGD 法目前所面临的难题。

参考文献:

[1] FLORES P, LANKARANI H M, AMBRO'SIO J, et al. Modeling lubricated revolute clearance joints in multibody mechanical systems [C] // Proceedings of the 19th Biennial Conference on Mechanical Vibration

- and Noise. New York, USA: ASME, 2003: 2689-2696.
- [2] LIANG Peng, LU Changhou, DING Jie, et al. A method for measuring the hydrodynamic effect on the bearing land [J]. *Tribology International*, 2013, 67 (11): 146-153.
- [3] 杨攀, 陈渭. 人字形螺旋槽动压止推轴承性能分析 [J]. *西安交通大学学报*, 2020, 54(10): 1-13.
YANG Pan, CHEN Wei. Analysis of the performance of the herringbone spiral groove thrust bearing [J]. *Journal of Xi'an Jiaotong University*, 2020, 54(10): 1-13.
- [4] 刘红彬, 孟永钢. 基于区域分解法的纹理表面流体润滑分析: 纹理分布模式的影响 [J]. *摩擦学学报*, 2007 (6): 555-561.
LIU Hongbin, MENG Yonggang. Hydrodynamic lubrication analysis of textured surfaces with the domain decomposition method: effect of texture distribution patterns [J]. *Tribology*, 2007(6): 555-561.
- [5] KUMAR A, BOOKER J F. A finite element cavitation algorithm [J]. *Journal of Tribology*, 1991, 113(2): 276-286.
- [6] 吕延军, 虞烈, 刘恒. 流体动压滑动轴承-转子系统非线性动力特性及稳定性 [J]. *摩擦学学报*, 2005, 25 (1): 61-66.
LÜ Yanjun, YU Lie, LIU Heng. Stability and nonlinear dynamic behavior of a hydrodynamic journal bearing-rotor-system [J]. *Tribology*, 2005, 25(1): 61-66.
- [7] REDDI M. Finite-element solution of the incompressible lubrication problem [J]. *ASME Journal of Lubrication Technology*, 1969, 91(3): 524-533.
- [8] PEI Shiyuan, XU Hua, MA Shilei, et al. Multiscale method for modeling surface texture effects in hydrodynamic lubrication regime [J]. *Tribology International*, 2011, 45: 119-126.
- [9] CAPONE G. Descrizione analitica del campo di forze fluidodinamico nei cuscinetti cilindrici lubrificati [J]. *L'Energia Elettrica*, 1991, 3: 105-110.
- [10] SOMMERFELD A. Zur Hydrodynamische theorie der schmiermittelreibung [J]. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik*, 1904, 50: 97-155.
- [11] 张永芳, 张伟, 党超, 等. 轴向槽动压滑动轴承非线性油膜力解析模型 [J]. *摩擦学学报*, 2018, 38(2): 220-228.
ZHANG Yongfang, ZHANG Wei, DANG Chao, et al. Analytical model for nonlinear fluid film forces of hydrodynamic journal bearing with axial grooves [J]. *Tribology*, 2018, 38(2): 220-228.
- [12] SFYRIS D, CHASALEVRIS A. An exact analytical solution of the Reynolds equation for the finite journal bearing [J]. *Tribology International*, 2012, 55(1): 46-58.
- [13] SFYRIS D, CHASALEVRIS A. Evaluation of the finite journal bearing characteristics, using the exact analytical solution of the Reynolds equation [J]. *Tribology International*, 2013, 57: 216-234.
- [14] CHASALEVRIS A. Finite length floating ring bearings: operational characteristics using analytical methods [J]. *Tribology International*, 2016, 94: 571-590.
- [15] 张永芳, 黑棣, 何介夫, 等. 有限长滑动轴承非线性油膜力的近似解法 [J]. *摩擦学学报*, 2016, 36(4): 488-494.
ZHANG Yongfang, HEI Di, HE Jiefu, et al. An approximate solution method for nonlinear oil film forces of finite length journal sliding bearing [J]. *Tribology*, 2016, 36(4): 488-494.
- [16] AMINE A, BÉCHIR M, FRANCISCO C, et al. A new family of solvers for some classes of multidimensional partial differential equations encountered in kinetic theory modelling of complex fluids: Part II Transient simulation using space-time separated representations [J]. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 2007, 144(2/3): 98-121.
- [17] DUMON A, ALLERY C, AMMAR A. Proper general decomposition (PGD) for the resolution of Navier-Stokes equations [J]. *Journal of Computational Physics*, 2011, 230(4): 1387-1407.
- [18] DUMON A, ALLERY C, AMMAR A. Proper generalized decomposition method for incompressible flows in stream-vorticity formulation [J]. *European Journal of Control*, 2010, 19(5/6/7): 591-617.
- [19] TAMELLINI L, LE MATRE O, NOUY A. Model reduction based on proper generalized decomposition for the stochastic steady incompressible Navier-Stokes equations [J]. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 2014, 36(3): A1089-A1117.
- [20] CHERABI B, HAMRANI A, BELAIDI I, et al. An efficient reduced-order method with PGD for solving journal bearing hydrodynamic lubrication problems [J]. *Comptes Rendus Mécanique*, 2016, 344(10): 689-714.
- [21] PEI Shiyuan, XU Hua, YUN Meng, et al. Effects of surface texture on the lubrication performance of the floating ring bearing [J]. *Tribology International*, 2016, 102: 143-153.

(编辑 武红江)