

发动机半正弦波脉冲冲击下固体火箭动力 倒飞和软着陆时的位移响应

田红亮^{1,2,3}, 李森³, 杜轩¹, 董元发³, 张明松²

(1. 三峡大学机器人与智能系统宜昌市重点实验室, 443002, 湖北宜昌; 2. 三峡大学水电机械设备设计与维护湖北省重点实验室, 443002, 湖北宜昌; 3. 三峡大学机械与动力学院, 443002, 湖北宜昌)

摘要: 针对现有固体火箭位移响应未完整求解的情况, 对延迟时间进行杜阿迈尔卷积定积分, 可推导出固体火箭的位移响应。将火箭在动力倒飞及软着陆的位移响应和发生时间进行逐一比较, 获得位移冲击谱和最小发生时间。研究表明: 在动力倒飞阶段, 无量纲的火箭位移响应不会恒等于0。在软着陆阶段, 无量纲的火箭位移响应有可能恒等于0; 当脉冲冲击持续时间较短时, 火箭位移响应最大值发生在冲击作用结束以后的软着陆阶段; 当脉冲冲击持续时间较长时, 火箭位移响应最大值发生在冲击作用范围内的动力倒飞阶段; 火箭的位移达到最大值时, 相应的发生时间不是唯一的, 存在多个发生时间使位移取得最大值; 火箭位移响应最大值的计算结果与实验数据之间的相对误差为-9%~7%, 火箭位移最大值发生时间的计算结果与实验数据之间的相对误差为-6%~8%。

关键词: 固体火箭; 脉冲冲击; 动力倒飞; 软着陆; 半正弦波信号

中图分类号: TH113.1 **文献标志码:** A

DOI: 10.7652/xjtub202107003 **文章编号:** 0253-987X(2021)07-0021-12



OSID 码

Displacement Response of Inverse Flight with Dynamic Force and Soft Landing in Solid Rocket Under Half Sinusoidal Wave Impulse Shock

TIAN Hongliang^{1,2,3}, LI Sen³, DU Xuan¹, DONG Yuanfa³, ZHANG Mingsong²

(1. Yichang Key Laboratory of Robot and Intelligent System, China Three Gorges University, Yichang, Hubei 443002, China; 2. Hubei Key Laboratory of Hydroelectric Machinery Design and Maintenance, China Three Gorges University, Yichang, Hubei 443002, China; 3. College of Mechanical and Power Engineering, China Three Gorges University, Yichang, Hubei 443002, China)

Abstract: Aiming at the problem that current displacement response of solid rocket has not been completely solved, the displacement response of solid rocket is deduced from Duhamel convolutional definite integral on the retardation time. The displacement shock spectrum and minimum happening time are obtained after the displacement response and happening time of rocket in inverse flight with dynamic force and soft landing are compared. The research results show that the dimensionless rocket displacement response cannot permanently be equal to zero in inverse flight stage with dynamic force, but in soft landing stage, this phenomenon may occur. The maximum rocket displacement response happens in soft landing stage after shock action when shock impulse duration is relatively short, and it happens in inverse flight stage with dynamic force during shock action when the shock impulse duration is relatively long. When rocket displacement achieves the maximum value, the corresponding happening time is not sole and there

收稿日期: 2020-11-11。 作者简介: 田红亮(1973—), 男, 教授, 博士生导师; 杜轩(通信作者), 男, 副教授。 基金项目: 国家自然科学基金资助项目(52075292); 2019年度机器人与智能系统宜昌市三峡大学重点实验室开放基金资助项目(JXYC 00006); 2019年度水电机械设备设计与维护湖北省三峡大学重点实验室开放基金资助项目(2019KJX11)。

网络出版时间: 2021-04-16

网络出版地址: <http://kns.cnki.net/kcms/detail/61.1069.T.20210416.1055.004.html>

are several happening times making displacement attain the maximum value. The relative error between the calculating result of rocket displacement response's maximum value and the experimental data is in the range of $-9\%-7\%$. The relative error between the calculating result of happening time of rocket displacement's maximum value and experimental data is in the range of $-6\%-8\%$.

Keywords: solid rocket; impulse shock; inverse flight with dynamic force; soft landing; half sinusoidal wave signal

固体火箭从高空返回和垂直定点软着陆回收是火箭得以重复使用的一种重要方法。对于火箭垂直回收任务来说,回收过程既要进行减速和精确软着陆,又要满足返回过程中各种过程约束,此外还要使得燃料消耗最少。由于火箭回收的初始高度(如240 km)比较高,一般而言,整个返回弹道可以分为动力倒飞和软着陆两个阶段。

火箭回收制导算法一直是众多学者的研究方向。邵楠等针对火箭高空再入定点回收,基于凸优化方法提出了一种考虑气动力和推力控制的多阶段轨迹优化方法^[1]。贺军义等使用多体系统传递矩阵法和发射动力学理论,建立了多管火箭发射动力学模型^[2]。张有为等通过金属丝中空的部分向燃烧室内输出液体工质,加入负热流来改变金属丝向药柱的导热速度^[3]。尹云玉对固体火箭自由运行状态获取的低频振动数据进行两次积分得到位移参数^[4],还基于小波分析在时频两域皆具有表征信号局部特征的性质,对固体火箭飞行遥测过载数据进行了小波分解^[5]。崔振新等建立了直升机CH-53D的动力学模型^[6]。吴靖等给出了满足直升机地面共振稳定性要求的起落架刚度和阻尼的优化设计方法^[7]。魏钊等考虑地球自转和发动机燃料变化所引起的附加力的影响,建立了弹性体远程火箭弹六自由度运动模型^[8]。刘文芝等设计了固体火箭发动机推力矢量控制系统的结构^[9]。毕祥军等提出了将线式分离系统应用在芯级与助推器的捆绑分离上^[10]。Kinefu-chi等应用一种计算流体动力学和有限差分时间域的耦合方法,以预测飞行高度240 km的离子化固体火箭在第三飞行阶段沿S频带遥感勘测的衰减特性^[11]。Griego等通过计算流体动力学代码对固体火箭推进剂进行了灵敏度分析^[12]。Gao等研究了喷射引擎燃烧室的有效燃烧^[13]。Binauld等提出了获取固体燃料火箭的流量和发热的计算方法^[14]。Hashim等将混合气体生成装置应用在火箭冲压喷气发动机中^[15]。Fu等对二元燃料火箭发动机的实验数据进行拟合,提出了一种壁冲击模型^[16]。

Acharya等研究了火箭发动机再生冷通道管口的热传递机制和熵生成的特点^[17]。Li等研究了火箭发动机的粉末镁和二氧化碳的燃烧特性,镁粉在干冰内继续燃烧,发出耀眼的白光,干冰易升华,干冰中的CO₂之间只存在范德华力不存在氢键,一个分子周围有12个紧邻分子^[18]。Du等研究了大推力火箭发动机燃烧膛的大幅度振动机制和振动控制技术^[19]。

已有一些文献采用有限元方法。宏观世界规律是由微观机制所决定的,现采用理论推导的方式,在机理上进行探究。以返航时的固体火箭为研究对象,研究了动力倒飞和软着陆两个阶段的动力学响应。发动机点火之后,对固体火箭作用一个脉冲冲击力,固体火箭处于动力倒飞,在冲击脉冲持续时间之内求解出火箭的位移响应和位移绝对值的最大值;发动机熄火之后,固体火箭处于软着陆,在冲击脉冲持续时间之外推导出火箭的位移响应和位移绝对值的最大值;比较固体火箭动力倒飞和软着陆的位移绝对值的最大值的大小,取其较大值,给出位移冲击谱。

1 固体火箭的动力学响应

1.1 动力倒飞阶段($0 \leq t \leq t_d$)

发动机作用在火箭上的脉冲冲击力为

$$F(t) = f \sin \frac{\pi t}{t_d}, \quad 0 < t \leq t_d \quad (1)$$

式中: f 为脉冲冲击力的振幅; t_d 为冲击脉冲持续时间。

当任意时间满足 $t \leq t_d$ 时,由杜阿迈尔卷积积分得固体火箭的位移响应

$$x(t) = \frac{T_n}{2\pi m} \int_0^t F(\tau) \sin \frac{2\pi}{T_n}(t-\tau) d\tau, \quad t \leq t_d \quad (2)$$

式中: T_n 为固体火箭振动的固有最小正周期; m' 为固体火箭除燃料外的箭体质量^[20]。

将式(1)代入式(2),得

$$x(t) = \frac{fT_n}{2\pi m} \int_0^t \sin \frac{\pi\tau}{t_d} \sin \frac{2\pi t - 2\pi\tau}{T_n} d\tau, \quad t \leq t_d \quad (3)$$

根据两正弦的积化和差公式,式(3)可变形为

$$x(t) = -\frac{fT_n}{4\pi m} \left\{ \int_0^t \cos \left[\left(\frac{\pi}{t_d} - \frac{2\pi}{T_n} \right) \tau + \frac{2\pi t}{T_n} \right] d\tau - \int_0^t \cos \left[\left(\frac{\pi}{t_d} + \frac{2\pi}{T_n} \right) \tau - \frac{2\pi t}{T_n} \right] d\tau \right\}, \quad t \leq t_d \quad (4)$$

式(4)简化为

$$x(t) = \frac{fT_n^2}{4\pi^2 m} \left(\sin \frac{\pi t}{t_d} - \frac{T_n}{2t_d} \sin \frac{2\pi t}{T_n} \right) / \left(1 - \frac{T_n^2}{4t_d^2} \right), \quad t \leq t_d \neq \frac{T_n}{2} \quad (5)$$

固体火箭振动的固有角频率为

$$\omega_n = \frac{2\pi}{T_n} \quad (6)$$

将式(6)代入式(5),得

$$x(t) = \frac{f}{m\omega_n^2} \left(\sin \frac{\pi t}{t_d} - \frac{T_n}{2t_d} \sin \frac{2\pi t}{T_n} \right) / \left(1 - \frac{T_n^2}{4t_d^2} \right), \quad t \leq t_d \neq \frac{T_n}{2} \quad (7)$$

式(7)进一步简化为

$$\frac{k}{f} x(t) = \left(\sin \frac{\pi t}{t_d} - \frac{T_n}{2t_d} \sin \frac{2\pi t}{T_n} \right) / \left(1 - \frac{T_n^2}{4t_d^2} \right), \quad t \leq t_d \neq \frac{T_n}{2} \quad (8)$$

式中: k 为固体火箭的支承刚度。

当自变量 $t_d = \frac{T_n}{2}$ 时,由 L'Hospital 法则得式

(8)的极限

$$\frac{k}{f} x(t) = \lim_{t_d \rightarrow \frac{T_n}{2}} \left(t_d \sin \frac{\pi t}{t_d} - \frac{T_n}{2} \sin \frac{2\pi t}{T_n} \right) / (2t_d - T_n) = \frac{1}{2} \sin \frac{2\pi t}{T_n} - \frac{\pi t}{T_n} \cos \frac{2\pi t}{T_n}, \quad t \leq t_d = \frac{T_n}{2} \quad (9)$$

将式(8)和(9)合写在一起,得无量纲的位移响应

$$X(t) =$$

$$\begin{cases} \left(\sin \frac{\pi t}{t_d} - \frac{T_n}{2t_d} \sin \frac{2\pi t}{T_n} \right) / \left(1 - \frac{T_n^2}{4t_d^2} \right), & t \leq t_d \neq \frac{T_n}{2} \\ \frac{1}{2} \sin \frac{2\pi t}{T_n} - \frac{\pi t}{T_n} \cos \frac{2\pi t}{T_n}, & t \leq t_d = \frac{T_n}{2} \end{cases} \quad (10)$$

式(10)关于时间 t 的一阶导数为

$$X'(t) =$$

$$\begin{cases} \pi \left(\cos \frac{\pi t}{t_d} - \cos \frac{2\pi t}{T_n} \right) / \left(t_d - \frac{T_n^2}{4t_d} \right), & t \leq t_d \neq \frac{T_n}{2} \\ \frac{2\pi^2}{T_n^2} t \sin \frac{2\pi t}{T_n} \geq 0, & t \leq t_d = \frac{T_n}{2} \end{cases} \quad (11)$$

为求函数 $|X(t)|$ 在闭区间 $0 \leq t \leq t_d$ 上的最大值,先求 $X(t)$ 在开区间 $0 < t < t_d$ 内的驻点,解方程 $X'(t) = 0, 0 < t < t_d$ 。令式(11)的第1式为0,得

$$\cos \frac{\pi t}{t_d} = \cos \frac{2\pi t}{T_n}, \quad t < t_d \neq \frac{T_n}{2} \quad (12)$$

方程式(12)的第一个解为

$$t = 2mt_d / \left(\frac{2t_d}{T_n} - 1 \right), \quad m \in \mathbf{Z}, t < t_d \neq \frac{T_n}{2} \quad (13)$$

式中: $\mathbf{Z}$ 为整数集。

$$0 < 2m / \left(\frac{2t_d}{T_n} - 1 \right) < 1 \quad (14)$$

$$\frac{t_d}{T_n} - \frac{1}{2} > m \in \mathbf{N}^*, \quad t_d > \frac{3}{2} T_n \quad (15)$$

式中: $\mathbf{N}^*$ 为正整数集。或者

$$-\frac{1}{2} < \frac{t_d}{T_n} - \frac{1}{2} < m \leq -1, \quad \frac{t_d}{T_n} < \frac{1}{2}, \quad m \in \mathbf{Z} \quad (16)$$

有趣的是,满足式(16)的整数 m 一定不存在。

事实上,当 $m \leq -1, \frac{t_d}{T_n} < \frac{1}{2}, -1 < \frac{2t_d}{T_n} - 1 < 0$,故

$-2m < 2m / \left(\frac{2t_d}{T_n} - 1 \right) < +\infty$ (趋向于 $+\infty$),则

$2m / \left(\frac{2t_d}{T_n} - 1 \right) > -2m \geq 2$,这与式(14)矛盾。表明

如果 $\frac{t_d}{T_n} < \frac{1}{2}$,式(10)的第1式无极值,故方程式(14)的解为式(15)。

方程(12)的第2个解为

$$t = 2lt_d / \left(1 + \frac{2t_d}{T_n} \right), \quad l \in \mathbf{N}^*, \quad t < t_d \neq \frac{T_n}{2} \quad (17)$$

$$\frac{1}{2} + \frac{t_d}{T_n} > l \in \mathbf{N}^*, \quad \frac{t_d}{T_n} > \frac{1}{2} \quad (18)$$

式(11)关于时间 t 求一阶导数,得

$$X''(t) = \begin{cases} \pi^2 \left(\frac{2}{T_n} \sin \frac{2\pi t}{T_n} - \frac{1}{t_d} \sin \frac{\pi t}{t_d} \right) / \left(t_d - \frac{T_n^2}{4t_d} \right), \\ \quad t \leq t_d \neq \frac{T_n}{2} \\ \frac{2\pi^2}{T_n^2} \left(\sin \frac{2\pi t}{T_n} + \frac{2\pi}{T_n} t \cos \frac{2\pi t}{T_n} \right), \\ \quad t \leq t_d = \frac{T_n}{2} \end{cases} \quad (19)$$

由式(14)和(15),将式(13)代入式(19)的第1式

$$X'' = \frac{4\pi^2}{T_n(2t_d + T_n)} \sin \left(2m\pi / \left(\frac{2t_d}{T_n} - 1 \right) \right) > 0,$$

$$t < t_d > \frac{3}{2}T_n \quad (20)$$

故存在正数 δ , 函数 $X(t)$ 的驻点 t 的一个 δ 邻域 $(t - \delta, t + \delta)$, 式(13)是极小值点, 式(13)中的整数用 m 表示, 代表最小。根据式(14)和(15), 将式(13)代入式(10)的第1式, 得一系列极小值

$$X = \frac{2t_d}{2t_d + T_n} \sin\left(2m\pi / \left(\frac{2t_d}{T_n} - 1\right)\right) > 0, \quad t < t_d > \frac{3}{2}T_n \quad (21)$$

按照式(18), 将式(17)代入式(19)的第1式, 得

$$X'' = -\frac{4\pi^2}{T_n(2t_d - T_n)} \sin\left(2l\pi / \left(1 + \frac{2t_d}{T_n}\right)\right) < 0, \quad t < t_d > \frac{T_n}{2} \quad (22)$$

故式(17)是极大值点, 式中的整数用 l 表示, 代表最大。根据式(18), 将式(17)代入式(10)的第1式, 得一系列极大值

$$X = \frac{2t_d}{2t_d - T_n} \sin\left(2l\pi / \left(1 + \frac{2t_d}{T_n}\right)\right) > 0, \quad t < t_d > \frac{T_n}{2} \quad (23)$$

位移的一系列极大值与 $\frac{t_d}{T_n}$ 的关系如图1所示。

由图1a可见, 当 $0 \leq \frac{t_d}{T_n} \leq \frac{1}{2}$ 时, 本文解法与文献[21]解法存在一定误差, 将 $l=1$ 代入式(18), 得 $\frac{t_d}{T_n} > \frac{1}{2}$, 即当 $0 \leq t_d \leq \frac{T_n}{2}$ 时, 函数 $X(t)$ 无极大值; 但当 $\frac{t_d}{T_n} < \frac{1}{2}$ 时, 文献[21]仍然采用式(23), 值得商榷。

由图1b可见, 当 $0 \leq \frac{t_d}{T_n} \leq \frac{1}{2}$ 时, 本文解法与文献[21]解法存在较大误差, 将 $l=2$ 代入式(18), 得 $\frac{t_d}{T_n} > \frac{3}{2}$, 即当 $0 \leq t_d \leq \frac{3}{2}T_n$ 时, 函数 $X(t)$ 无极大值; 但当 $\frac{t_d}{T_n} \leq \frac{1}{6}$ 时, 文献[21]仍然采用式(23)。文献[21]还有一个瑕疵: 将冲击脉冲持续时间 t_d 等同于时间 t , 在图1a中, 认为 $l=1$ 时有一个峰值, 在图1b中, 认为 $l=2$ 时有两个峰值。实际上, 函数 $X(t)$ 相对于 t 而言存在峰值, 而不是相对于 t_d 来说。

在式(15)的条件下, 选取适当的 m 使式(21)取得最大值

$$2m\pi / \left(\frac{2t_d}{T_n} - 1\right) = \frac{\pi}{2} \Rightarrow m = \frac{t_d}{2T_n} - \frac{1}{4},$$

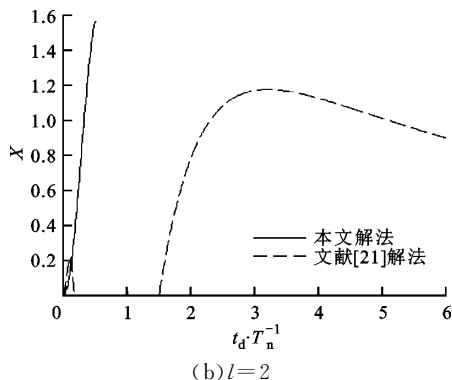
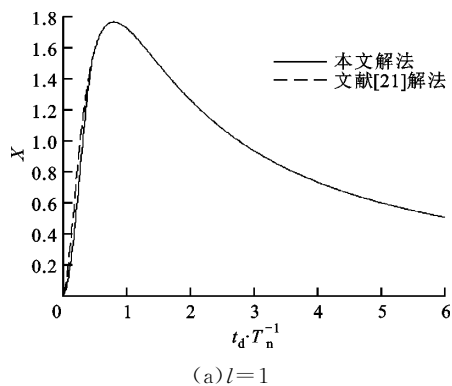


图1 极大值与冲击脉冲持续时间的关系

Fig.1 Relation between extreme large value and shock impulse duration

$$t_d > \frac{3}{2}T_n \quad (24)$$

考虑到 m 是正整数, 故取

$$m = \left[\frac{t_d}{2T_n} - \frac{1}{4} \right] \in \mathbf{N}^*, \quad t_d > \frac{3}{2}T_n \quad (25)$$

式中: $\left[\frac{t_d}{2T_n} - \frac{1}{4} \right]$ 表示最接近于 $\frac{t_d}{2T_n} - \frac{1}{4}$ 的正整数, 即采用四舍五入的原则处理小数或分数部分, 朝最近的方向取整。例如当 $\frac{t_d}{T_n} = \frac{7}{2}$ 时, $\left[\frac{t_d}{2T_n} - \frac{1}{4} \right]$ 等于 1 或 2, 有两个值, 导致了问题的复杂性。

将式(25)代入式(15), 必须满足

$$\frac{t_d}{T_n} - \frac{1}{2} > \left[\frac{t_d}{2T_n} - \frac{1}{4} \right], \quad t_d > \frac{3}{2}T_n \quad (26)$$

根据取整函数 $[\]$ 的定义, 总有

$$\frac{t_d}{2T_n} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \geq \left[\frac{t_d}{2T_n} - \frac{1}{4} \right] \geq \frac{t_d}{2T_n} - \frac{1}{4} - \frac{1}{2}, \quad t_d > \frac{3}{2}T_n \quad (27)$$

以下不等式总成立

$$\frac{t_d}{T_n} - \frac{1}{2} > \frac{t_d}{2T_n} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2}, \quad t_d > \frac{3}{2}T_n \quad (28)$$

根据式(28)和(27), 不等式(26)成立。

将式(25)代入式(21),得一系列极小值式(21)的最大值

$$X_{\max} = \frac{2t_d}{2t_d + T_n} \sin\left(\left[\frac{t_d}{2T_n} - \frac{1}{4}\right]\pi / \left(\frac{t_d}{T_n} - \frac{1}{2}\right)\right),$$
$$t < t_d > \frac{3}{2}T_n \tag{29}$$

在式(18)的前提下,选择适合的 l 使式(23)最大

$$2l\pi / \left(1 + \frac{2t_d}{T_n}\right) = \frac{\pi}{2} \Rightarrow l = \frac{1}{4} + \frac{t_d}{2T_n},$$
$$t_d > \frac{T_n}{2} \tag{30}$$

因为 l 为正整数,故得

$$l = \left[\frac{1}{4} + \frac{t_d}{2T_n}\right] \in \mathbf{N}^*, \quad t_d > \frac{T_n}{2} \tag{31}$$

式中: $\left[\frac{1}{4} + \frac{t_d}{2T_n}\right]$ 表示最接近于 $\frac{1}{4} + \frac{t_d}{2T_n}$ 的正整数。

例如,当 $\frac{t_d}{T_n} = \frac{5}{2}$ 时, $\left[\frac{1}{4} + \frac{t_d}{2T_n}\right]$ 等于 1 或 2,有两个数据。

将式(31)代入式(18),下式必须成立

$$\frac{1}{2} + \frac{t_d}{T_n} > \left[\frac{1}{4} + \frac{t_d}{2T_n}\right], \quad t_d > \frac{T_n}{2} \tag{32}$$

按照取整函数 $[\]$ 的定义,恒有

$$\frac{1}{4} + \frac{t_d}{2T_n} + \frac{1}{2} \geq \left[\frac{1}{4} + \frac{t_d}{2T_n}\right] \geq \frac{1}{4} + \frac{t_d}{2T_n} - \frac{1}{2},$$
$$t_d > \frac{T_n}{2} \tag{33}$$

存在以下恒不等式

$$\frac{1}{2} + \frac{t_d}{T_n} > \frac{1}{4} + \frac{t_d}{2T_n} + \frac{1}{2}, \quad t_d > \frac{T_n}{2} \tag{34}$$

根据式(34)和(33),不等式(32)成立。

将式(31)代入式(23),得一系列极大值式(23)的最大值

$$X_{\max} = \frac{2t_d}{2t_d - T_n} \sin\left(\left[\frac{1}{4} + \frac{t_d}{2T_n}\right]\pi / \left(\frac{1}{2} + \frac{t_d}{T_n}\right)\right),$$
$$t < t_d > \frac{T_n}{2} \tag{35}$$

例如,当 $\frac{t_d}{T_n} = \frac{7}{2}$ 时,式(29)的具体结果为 $\frac{7\sqrt{3}}{16}$
 $\approx 0.757\ 8$,式(35)的具体结果为 $\frac{7}{6} \approx 1.166\ 7$ 。更一般地,存在一个恒不等式,式(35)恒大于式(29),极大值的最大值与极小值的最大值如图 2 所示。

将式(31)代入式(17),得位移最大值发生的时间为

$$t_m = \left[\frac{1}{4} + \frac{t_d}{2T_n}\right]t_d / \left(\frac{1}{2} + \frac{t_d}{T_n}\right),$$

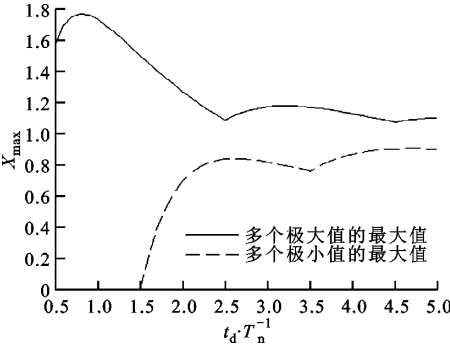


图 2 极大值的最大值与极小值的最大值 $\left(\frac{t_d}{T_n} > \frac{1}{2}\right)$

Fig. 2 Maximum value of extreme large value and maximum value of extreme small value

$$t < t_d > \frac{T_n}{2} \tag{36}$$

按照式(32),式(36)中的 $t_m < t_d$ 成立。

从式(11)的第 1 式可以看出,当 $t \leq t_d < \frac{T_n}{2}$ 时,
 $\cos \frac{\pi t}{t_d} < \cos \frac{2\pi t}{T_n}, X'(t) > 0$,故函数 $X(t)$ 在闭区间 $[0, t_d]$ 上是增函数,故式(10)的最大值为

$$X_{\max} = X(t_d) =$$
$$\begin{cases} \frac{T_n}{2t_d} \sin \frac{2\pi t_d}{T_n} / \left(\frac{T_n^2}{4t_d^2} - 1\right), & t \leq t_d < \frac{T_n}{2} \\ \frac{\pi}{2}, & t \leq t_d = \frac{T_n}{2} \end{cases} \tag{37}$$

由式(37),得位移最大值发生的时间

$$t_m = t_d, \quad t \leq t_d \leq \frac{T_n}{2} \tag{38}$$

由式(37)和(35)可得,在闭区间 $t \in [0, t_d]$ 上位移的最大值为

$$X_{\max} =$$
$$\begin{cases} \frac{t_d}{2T_n} \sin \frac{2\pi t_d}{T_n} / \left(\frac{1}{4} - \frac{t_d^2}{T_n^2}\right), & \frac{t_d}{T_n} < \frac{1}{2} \\ \frac{\pi}{2}, & \frac{t_d}{T_n} = \frac{1}{2} \\ \frac{t_d}{T_n} \sin\left(\left[\frac{1}{4} + \frac{t_d}{2T_n}\right]\pi / \left(\frac{1}{2} + \frac{t_d}{T_n}\right)\right) / \left(\frac{t_d}{T_n} - \frac{1}{2}\right), & \frac{t_d}{T_n} > \frac{1}{2} \end{cases} \tag{39}$$

由式(38)和(36)可得,在闭区间 $t \in [0, t_d]$ 上位移最大值发生的无量纲时间

$$\frac{t_m}{T_n} = \begin{cases} \frac{t_d}{T_n}, & \frac{t_d}{T_n} \leq \frac{1}{2} \\ \left[\frac{1}{4} + \frac{t_d}{2T_n}\right] \frac{t_d}{T_n} / \left(\frac{1}{2} + \frac{t_d}{T_n}\right), & \frac{t_d}{T_n} > \frac{1}{2} \end{cases} \tag{40}$$

1.2 软着陆阶段($t \geq t_d$)

当任意时间满足 $t \geq t_d$ 时,由杜阿迈尔卷积积分,得固体火箭的位移响应

$$x(t) = \frac{T_n}{2\pi m'} \int_0^{t_d} F(\tau) \sin \frac{2\pi}{T_n}(t-\tau) d\tau, \quad t \geq t_d \quad (41)$$

将式(1)代入式(41),得

$$x(t) = \frac{fT_n}{2\pi m'} \int_0^{t_d} \sin \frac{\pi\tau}{t_d} \sin \frac{2\pi t - 2\pi\tau}{T_n} d\tau, \quad t \geq t_d \quad (42)$$

根据两正弦的积化和差公式,式(42)可变形为

$$x(t) = -\frac{fT_n}{4\pi m'} \left\{ \int_0^{t_d} \cos \left[\left(\frac{\pi}{t_d} - \frac{2\pi}{T_n} \right) \tau + \frac{2\pi t}{T_n} \right] d\tau - \int_0^{t_d} \cos \left[\left(\frac{\pi}{t_d} + \frac{2\pi}{T_n} \right) \tau - \frac{2\pi t}{T_n} \right] d\tau \right\}, \quad t \geq t_d \quad (43)$$

式(43)简化为

$$x(t) = -\frac{fT_n^2}{4\pi^2 m'} \frac{T_n}{2t_d} \left(\sin \frac{2\pi t}{T_n} + \sin \frac{2\pi t - 2\pi t_d}{T_n} \right) / \left(1 - \frac{T_n^2}{4t_d^2} \right), \quad t \geq t_d \neq \frac{T_n}{2} \quad (44)$$

将式(6)代入式(44),有

$$x(t) = \frac{f}{m' \omega_n^2} \frac{T_n}{2t_d} \left(\sin \frac{2\pi t}{T_n} + \sin \frac{2\pi t - 2\pi t_d}{T_n} \right) / \left(\frac{T_n^2}{4t_d^2} - 1 \right), \quad t \geq t_d \neq \frac{T_n}{2} \quad (45)$$

式(45)进一步简化为

$$\frac{k}{f} x(t) = \frac{T_n}{2t_d} \left(\sin \frac{2\pi t}{T_n} + \sin \frac{2\pi t - 2\pi t_d}{T_n} \right) / \left(\frac{T_n^2}{4t_d^2} - 1 \right), \quad t \geq t_d \neq \frac{T_n}{2} \quad (46)$$

根据两正弦的和化积公式,式(46)可变形为

$$\frac{k}{f} x(t) = \frac{T_n}{t_d} \cos \frac{\pi t_d}{T_n} \sin \frac{2\pi t - \pi t_d}{T_n} / \left(\frac{T_n^2}{4t_d^2} - 1 \right), \quad t \geq t_d \neq \frac{T_n}{2} \quad (47)$$

当自变量 $t_d = \frac{T_n}{2}$ 时,得式(47)的极限

$$\frac{k}{f} x(t) = \lim_{t_d \rightarrow \frac{T_n}{2}} T_n \frac{\cos \frac{\pi t_d}{T_n}}{2t_d - T_n} \cos \frac{2\pi t}{T_n} = -\frac{\pi}{2} \cos \frac{2\pi t}{T_n}, \quad t \geq t_d = \frac{T_n}{2} \quad (48)$$

由式(47)和(48)可得,无量纲的位移响应

$$X(t) =$$

$$\begin{cases} \frac{T_n}{t_d} \cos \frac{\pi t_d}{T_n} \sin \frac{2\pi t - \pi t_d}{T_n} / \left(\frac{T_n^2}{4t_d^2} - 1 \right), & t \geq t_d \neq \frac{T_n}{2} \\ -\frac{\pi}{2} \cos \frac{2\pi t}{T_n}, & t \geq t_d = \frac{T_n}{2} \end{cases} \quad (49)$$

使 $|X(t)|$ 取得最大值的第 1 个条件为

$$\frac{2\pi t - \pi t_d}{T_n} = p\pi - \frac{\pi}{2}, \quad p \in \mathbf{N}^*, \quad t \geq t_d \neq \frac{T_n}{2} \quad (50)$$

$$t = \frac{2p-1}{4} T_n + \frac{t_d}{2}, \quad p \in \mathbf{N}^*, \quad t \geq t_d \neq \frac{T_n}{2} \quad (51)$$

由式(51)的条件 $t \geq t_d$, 得

$$\frac{1}{2} + \frac{t_d}{T_n} \leq p \in \mathbf{N}^*, \quad t_d \neq \frac{T_n}{2} \quad (52)$$

使 $|X(t)|$ 取得最大值的第 2 个条件为

$$\frac{2\pi t}{T_n} = n\pi, \quad n \in \mathbf{N}^*, \quad t \geq t_d = \frac{T_n}{2} \quad (53)$$

$$t = \frac{n}{2} T_n = nt_d \geq t_d, \quad n \in \mathbf{N}^* \quad (54)$$

将式(50)代入式(49)的第 1 式,得位移绝对值的最大值

$$|X|_{\max} = \frac{T_n}{t_d} \left| \cos \frac{\pi t_d}{T_n} \right| / \left| \frac{T_n^2}{4t_d^2} - 1 \right|, \quad t \geq t_d \neq \frac{T_n}{2} \quad (55)$$

将式(53)代入式(49)的第 2 式,得位移绝对值的最大值

$$|X|_{\max} = \frac{\pi}{2}, \quad t \geq t_d = \frac{T_n}{2} \quad (56)$$

由式(55)和(56)可得,位移绝对值的最大值为

$$|X|_{\max} = \begin{cases} \frac{t_d}{T_n} \left| \cos \frac{\pi t_d}{T_n} \right| / \left| \frac{1}{4} - \frac{t_d^2}{T_n^2} \right|, & \frac{t_d}{T_n} \neq \frac{1}{2} \\ \frac{\pi}{2}, & \frac{t_d}{T_n} = \frac{1}{2} \end{cases} \quad (57)$$

值得注意的是,能将式(51)和(54)合并写成一个式子,得位移绝对值的最大值发生的无量纲时间

$$\frac{t_m}{T_n} = \frac{2p-1}{4} + \frac{t_d}{2T_n}, \quad \frac{1}{2} + \frac{t_d}{T_n} \leq p \in \mathbf{N}^* \quad (58)$$

1.3 整个返航阶段($t \geq 0$)

如前所述,分别确定了在动力倒飞和软着陆两个阶段位移绝对值的最大值,这两个最大值之中的较大者即为整体最大位移绝对值,即位移冲击谱或位移响应谱。逐一比较式(39)与(57)的大小,结果如下:

①当 $0 < \frac{t_d}{T_n} < \frac{1}{2}$ 时,式(57)的第 1 式大于式(39)的

第 1 式;当 $\frac{t_d}{T_n}=0$ 时,式(57)的第 1 式等于式(39)的第 1 式,均等于 0;②当 $\frac{t_d}{T_n}=\frac{1}{2}$ 时,式(39)的第 2 式等于式(57)的第 2 式;③当 $\frac{t_d}{T_n}>\frac{1}{2}$ 时,例如取一个特殊值,当 $\frac{t_d}{T_n}=\frac{7}{2}$ 时,式(39)的第 3 式结果等于 $\frac{7}{6} \approx 1.1667$,式(57)的第 1 式等于 0,更一般地,式(39)的第 3 式大于式(57)的第 1 式,如图 3 所示。

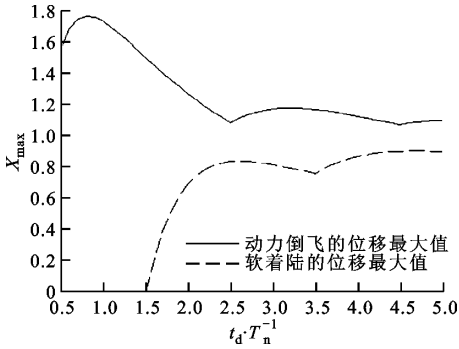


图 3 动力倒飞和软着陆的最大位移 ($\frac{t_d}{T_n} > \frac{1}{2}$)

Fig. 3 Maximum displacement of inverse flight with dynamic force and soft landing

故火箭在整个飞行阶段的位移冲击谱为

$$\mu = \begin{cases} \frac{t_d}{T_n} \cos \frac{\pi t_d}{T_n} / \left(\frac{1}{4} - \frac{t_d^2}{T_n^2} \right), & \frac{t_d}{T_n} < \frac{1}{2} \\ \frac{\pi}{2}, & \frac{t_d}{T_n} = \frac{1}{2} \\ \frac{t_d}{T_n} \sin \left(\left[\frac{1}{4} + \frac{t_d}{2T_n} \right] \pi / \left(\frac{1}{2} + \frac{t_d}{T_n} \right) \right) / \left(\frac{t_d}{T_n} - \frac{1}{2} \right), & \frac{t_d}{T_n} > \frac{1}{2} \end{cases} \quad (59)$$

在式(59)的第 3 式中,当 $\frac{1}{4} + \frac{t_d}{2T_n} = q + 0.5$, $q \in \mathbf{N}^*$ 时, $\sin \left(\left[\frac{1}{4} + \frac{t_d}{2T_n} \right] \pi / \left(\frac{1}{2} + \frac{t_d}{T_n} \right) \right) = \sin \frac{[q+0.5]\pi}{2q+1}$ 等于 $\sin \frac{q\pi}{2q+1}$ 或 $\sin \frac{(q+1)\pi}{2q+1}$, 有两个结果,但按照诱导公式 $\sin \frac{q\pi}{2q+1} = \sin \frac{(q+1)\pi}{2q+1}$, 此时式(59)的第 3 式是唯一确定值。

于是当 $\frac{t_d}{T_n} \leq \frac{1}{2}$ 时,位移最大值的发生时间由式(58)计算;当 $\frac{t_d}{T_n} > \frac{1}{2}$ 时,位移最大值的发生时间由

式(40)的第 2 式计算。故火箭在整个飞行阶段的位移最大值发生时间为

$$T = \begin{cases} \frac{2p-1}{4} + \frac{t_d}{2T_n}, & p \in \mathbf{N}^*, \quad \frac{t_d}{T_n} \leq \frac{1}{2} \\ \left[\frac{1}{4} + \frac{t_d}{2T_n} \right] \frac{t_d}{T_n} / \left(\frac{1}{2} + \frac{t_d}{T_n} \right), & \frac{t_d}{T_n} > \frac{1}{2} \end{cases} \quad (60)$$

在式(60)的第 3 式中,当 $\frac{1}{4} + \frac{t_d}{2T_n} = q + 0.5$, $q \in \mathbf{N}^*$ 时, $\left[\frac{1}{4} + \frac{t_d}{2T_n} \right] = [q + 0.5]$ 等于 q 或 $q + 1$, 此时式(60)的第 3 式有两个结果。

对于火箭飞行的最大速度,文献[22]的结果是文献[20]的 1 000 倍。火箭飞行的最大速度^[22]为

$$v = 2000 \ln \left(1 + \frac{M}{m'} \right) \quad (61)$$

式中 M 为已燃烧燃料的质量。

2 固体火箭返航数值仿真和讨论

长征二号 F 捆绑式大推力运载火箭全长为 58.3 m,起飞时的质量为 479.8 t,是目前我国研制的火箭中最长、最重的,起飞推力 f 为 5.88×10^6 N,火箭的支承刚度 k 为 1 435 900 N/m,在太空遨游 21 h,绕地球 14 圈,飞行约 61×10^7 m。

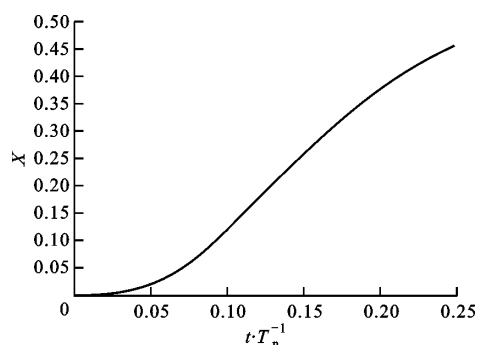
2.1 整个返航阶段 ($t \geq 0$) 的火箭位移响应

当 $\frac{t_d}{T_n}$ 取不同的值时,无量纲的火箭位移响应随 $\frac{t}{T_n}$ 的变化如图 4 所示。图 4e 中,当 $\frac{t}{T_n} \geq \frac{3}{2}$ 时,在软着陆阶段,无量纲的火箭位移响应为 0。图 4g 中,当 $\frac{t}{T_n} \geq \frac{5}{2}$ 时,在软着陆阶段,无量纲的火箭位移响应为 0。在 Matlab 软件中, $\sin(180^\circ) = 0$, $\cos(90^\circ) = 0$, $\sin(\pi) = 1.2246 \times 10^{-16}$, $\cos(\pi/2) = 6.1232 \times 10^{-17}$, 因为无理数圆周率 π 在 Matlab 中用有限位近似值 pi 来表示。

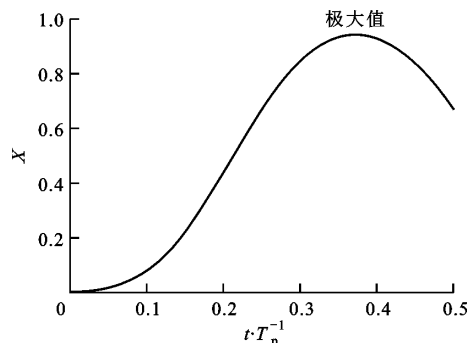
极大值和极小值统称为极值。从图 4d、4f、4g 和 4h 可见,函数 $X(t)$ 有多个极值,极值可能取正值也可能取负值,还可能是 0,需要求出 $|X(t)|$ 的最大值,而不是 $X(t)$ 的最大值。如果 $X(t)$ 的某个极小值是负数,某个极大值是正数,且负数与正数之和小于 0,为求出 $|X(t)|$ 的最大值,应该取 $X(t)$ 的这个极小值的绝对值。 $|X(t)|$ 的最大值也可能在区间的端点处取得。

按照图 4,在动力倒飞阶段,无量纲的火箭位移响应不会恒等于 0;在软着陆阶段,无量纲的火箭位

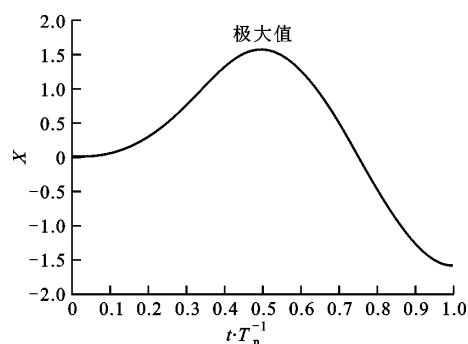
移响应有可能恒等于0,表明火箭的刚度较大,具有抵抗变形的能力。在图4g中,极大值1与极大值2



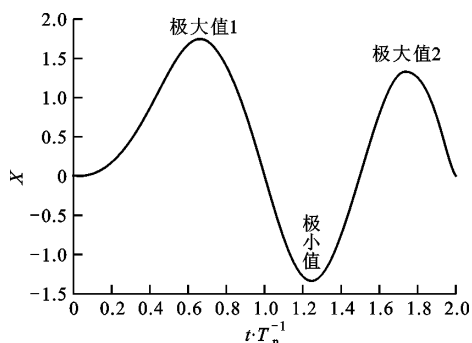
$$(a) \frac{t_d}{T_n} = \frac{1}{8}$$



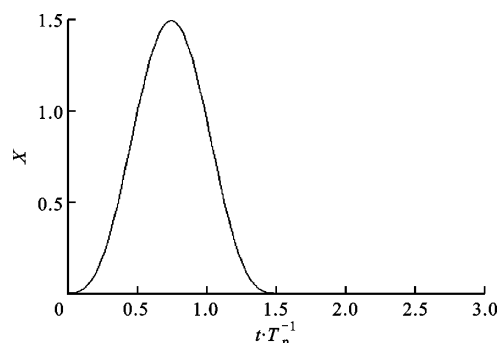
$$(b) \frac{t_d}{T_n} = \frac{1}{4}$$



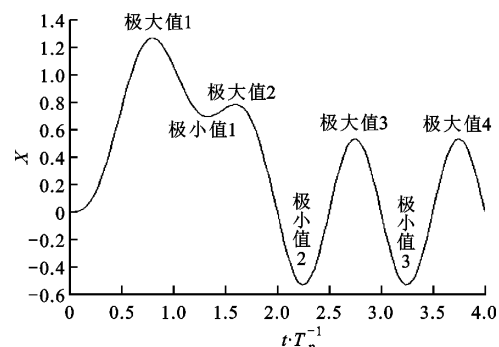
$$(c) \frac{t_d}{T_n} = \frac{1}{2}$$



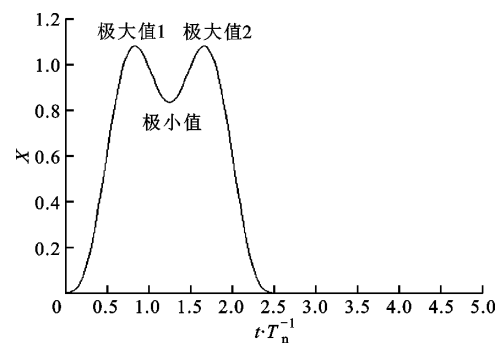
$$(d) \frac{t_d}{T_n} = 1$$



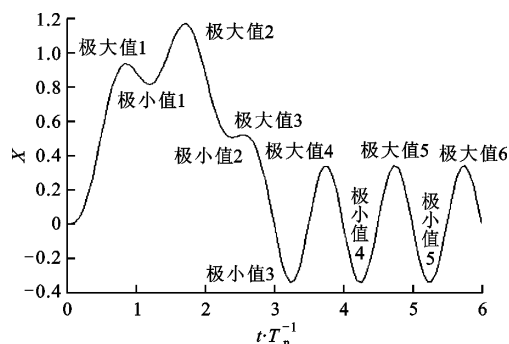
$$(e) \frac{t_d}{T_n} = \frac{3}{2}$$



$$(f) \frac{t_d}{T_n} = 2$$



$$(g) \frac{t_d}{T_n} = \frac{5}{2}$$



$$(h) \frac{t_d}{T_n} = 3$$

图4 无量纲的火箭位移响应与时间的关系
Fig. 4 Relation between dimensionless rocket displacement response and time

相等。在图 4h 中,极大值 2 大于极大值 1,且递增。

2.2 整个返航阶段的火箭位移冲击谱

火箭位移冲击谱 μ 与冲击脉冲持续时间的关系如图 5 所示,由图可见,当冲击脉冲持续时间较短时,火箭位移冲击谱发生在冲击作用结束以后的软着陆阶段;当冲击脉冲持续时间较长时,火箭位移响应最大值发生在冲击作用范围内的动力倒飞阶段。

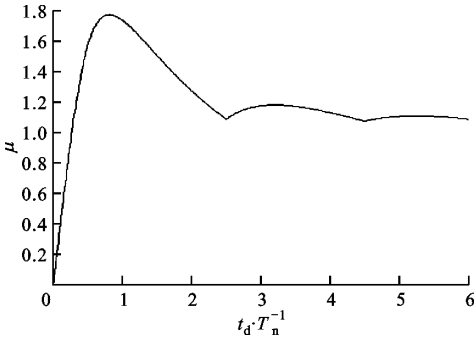
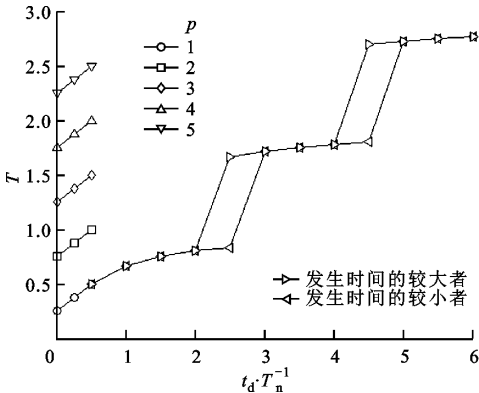


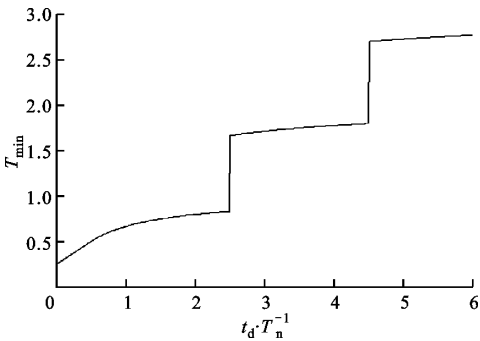
图 5 位移冲击谱与冲击脉冲持续时间的关系
Fig. 5 Curve of displacement shock spectrum vs. shock impulse duration

2.3 整个返航阶段的位移最大值发生时间

火箭位移最大值的发生时间与冲击脉冲持续时间之间的关系如图 6 所示。由图 6a 可见,当 $\frac{t_d}{T_n} \leq \frac{1}{2}$ 时,火箭的位移达到最大值时,对应的发生时间不是唯一的,即存在多个发生时间使位移取得最大值;当 $\frac{t_d}{T_n} = 2.5, 4.5, 6.5, 8.5, \dots$ 时,发生时间有 2 个。火箭的位移达到最大值时,对应的首次发生时间是唯一的。从图 6b 可见,火箭位移最大值发生的最小时间在某些点上是不连续的, $\frac{t_d}{T_n} = 2.5, 4.5, 6.5, 8.5, \dots$ 是最小时间的跳跃间断点。



(a) 位移最大值发生的所有时间



(b) 位移最大值发生的最小时间

图 6 位移最大值发生时间与冲击脉冲持续时间的关系
Fig. 6 Curve of happening time of displacement's maximum value vs. shock impulse duration

3 实验验证

燃料燃烧时的情况如图 7 所示,涡旋发生器撑杆材料是耐高温的透明石英窗玻璃,涡旋发生器撑杆因超声速燃烧室释放的热而发生微小形变;燃料燃烧火焰可通过燃烧室出口的观察窗看到;在通用科学实验室中测试,在风洞隧道中进行的自开发氢燃料 A5 火箭混合循环式发动机实验,开展了 82 次发动机实验,总时间大于 1 600 s,在存储热量风洞隧道中,也开展了自由喷气发动机实验^[23-24]。

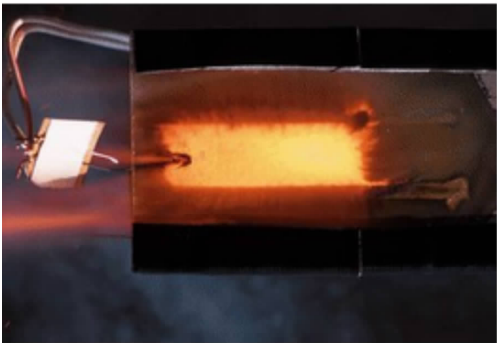


图 7 燃料燃烧时的情况
Fig. 7 State of fuel combustion

火箭飞行最大速度 $v_{\max}$ 与已燃烧燃料质量的关系如图 8 所示,由图可见,火箭飞行的最大速度近似与燃料燃烧的质量成正比,本文理论解较接近于实验数据。

宇宙飞船绕地球飞行速度 v 与距地面高度的关系如图 9 所示,由图可见,本文理论解与神舟五号飞船的实际飞行参数较吻合,近地飞船在几百千米的高度飞行,与地球半径 6 400 km 相比,完全可以说是在地面附近飞行,宇宙飞船绕地球飞行速度随离地面高度的增大而呈线性减小。

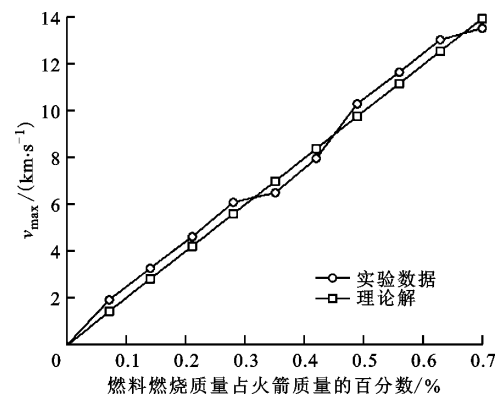


图8 火箭最大速度与燃料燃烧质量的关系

Fig. 8 Relation between rocket's maximum velocity and fuel combustion mass

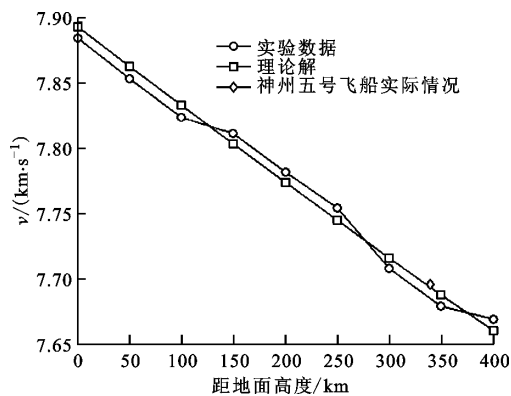


图9 飞船飞行速度与地面高度的关系

Fig. 9 Relation between airship flight velocity and ground height

把宇宙飞船从地球表面升高到 h 的高空处,进入轨道,飞船克服地球万有引力所做的功 W 如图 10 所示。当宇宙飞船在几百千米的高度飞行时,克服引力所做的功几乎与飞行高度成正比,因为飞行高度远小于地球半径。

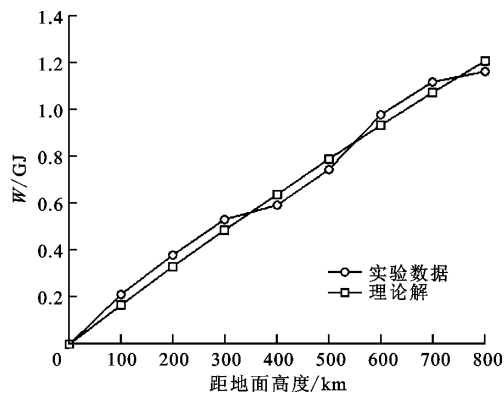


图10 飞船做功与离地球表面高度的关系

Fig. 10 Relation between work done by airship and earth surface height

火箭在返航阶段,对于给定的冲击脉冲持续时间 t_d ,火箭位移冲击谱 μ 、位移最大值的发生时间 T 见表 1^[25],由表可见,本文火箭位移响应最大值的计算结果与实验数据之间的相对误差为 $-9\%\sim 7\%$,火箭位移最大值发生时间的计算结果与实验数据之间的相对误差为 $-6\%\sim 8\%$ 。

表1 火箭返航时冲击谱参数与冲击脉冲持续时间的关系

Table 1 Relation between shock spectrum parameter of rocket returning to base and shock impulse duration

时间比 t_d/T_n	0	0.1	0.2	0.4	0.5	0.6	0.8	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8
文献[25]位移 μ_e	0	0.374 5	0.741 7	1.425 7	1.644 9	1.596 2	1.645 9	1.816 4	1.736 9	1.616 7	1.387 3	1.436 2
本文位移 μ_i	0	0.396 3	0.770 5	1.373 4	1.570 8	1.690 4	1.768 3	1.732 1	1.648 8	1.550 2	1.450 5	1.355 7
位移误差/%	0	5.814	3.882	-3.668	-4.505	5.901	7.438	-4.644	-5.070	-4.111	4.554	-5.608
文献[25]时间 T_e	0.259 6	0.316 8	0.365 9	0.435 8	0.472 6	0.521 6	0.591 7	0.709 1	0.749 2	0.789 1	0.700 6	0.743 8
本文时间 T_i	0.250 0	0.300 0	0.350 0	0.450 0	0.500 0	0.545 5	0.615 4	0.666 7	0.705 9	0.736 8	0.761 9	0.782 6
时间误差/%	-3.698	-5.303	-4.345	3.258	5.798	4.573	4.003	-5.984	-5.782	-6.623	8.750	5.218
时间比 t_d/T_n	2.0	2.2	2.4	2.5	2.6	2.8	3.0	3.2	3.4	3.6	3.8	4.0
文献[25]位移 μ_e	1.205 3	1.267 4	1.173 2	1.020 8	1.049 1	1.098 3	1.245 2	1.243 8	1.280 7	1.077 8	1.267 2	1.216 1
本文位移 μ_i	1.268 1	1.188 3	1.116 0	1.082 5	1.111 6	1.150 4	1.169 9	1.175 6	1.171 5	1.160 4	1.144 6	1.125 5
位移误差/%	5.208	-6.243	-4.874	6.047	5.954	4.747	-6.046	-5.484	-8.530	7.667	-9.674	-7.451
文献[25]时间 T_e	0.759 7	0.781 2	0.868 2	0.875 2	1.598 7	1.595 4	1.623 8	1.647 9	1.816 1	1.834 8	1.689 3	1.856 9
本文时间 T_i	0.800 0	0.814 8	0.827 6	0.833 3	1.677 4	1.697 0	1.714 3	1.729 7	1.743 6	1.756 1	1.767 4	1.777 8
时间误差/%	5.305	4.303	-4.678	-4.784	4.924	6.366	5.573	4.966	-3.993	-4.289	4.626	-4.261

4 结 论

对延迟时间进行杜阿迈尔卷积积分,推导了固体火箭的位移响应,所得结论如下。

(1)在动力倒飞阶段,无量纲的火箭位移响应不会恒等于0。在软着陆阶段,无量纲的火箭位移响应有可能恒等于0。

(2)当冲击脉冲持续时间较短时,火箭位移响应最大值发生在冲击作用结束以后的软着陆阶段。当冲击脉冲持续时间较长时,火箭位移响应最大值发生在冲击作用范围内的动力倒飞阶段。

(3)火箭的位移达到最大值时,对应的发生时间不是唯一的,存在多个发生时间使位移取得最大值。

参考文献:

- [1] 邵楠, 闫晓东. 火箭垂直回收多阶段最优轨迹规划方法 [J]. 宇航学报, 2019, 40(10): 1187-1196.
SHAO Nan, YAN Xiaodong. Multi-stage trajectory optimization for vertical pin-point landing of a reusable launch vehicle [J]. Journal of Astronautics, 2019, 40(10): 1187-1196.
- [2] 贺军义, 芮筱亭, 王国平, 等. 多管火箭发射过程中定向器振动特性研究 [J]. 振动与冲击, 2012, 31(1): 35-38, 139.
HE Junyi, RUI Xiaoting, WANG Guoping, et al. Vibration characteristic of launch guider of a MLRS in firing process [J]. Journal of Vibration and Shock, 2012, 31(1): 35-38, 139.
- [3] 张有为, 王晓宏. 利用嵌金属丝药柱调节固体火箭发动机推力的计算研究 [J]. 兵工学报, 2007, 28(10): 1218-1222.
ZHANG Youwei, WANG Xiaohong. Numerical research for adjusting thrust of solid rocket motor by using the embedded-wire grain [J]. Acta Armamentarii, 2007, 28(10): 1218-1222.
- [4] 尹云玉. 固体火箭自由运行状态截面弯矩识别方法 [J]. 宇航学报, 2010, 31(7): 1706-1710.
YIN Yunyu. An identification method for transverse response moment of solid rocket during free flight state [J]. Journal of Astronautics, 2010, 31(7): 1706-1710.
- [5] 尹云玉. 固体火箭横向响应载荷识别方法 [J]. 宇航学报, 2009, 30(6): 2135-2139.
YIN Yunyu. The identification method of transverse responding load for solid rocket [J]. Journal of Astronautics, 2009, 30(6): 2135-2139.
- [6] 崔振新, 曹义华. 直升机重载空投状态下的动态特性

- [J]. 航空动力学报, 2019, 34(2): 451-459.
- CUI Zhenxin, CAO Yihua. Dynamic characteristics of helicopter under heavy cargo airdrop condition [J]. Journal of Aerospace Power, 2019, 34(2): 451-459.
- [7] 吴靖, 胡国才, 柳泉, 等. 基于直升机地面共振要求的起落架刚度及阻尼优化设计 [J]. 航空学报, 2018, 39(12): 170-179.
WU Jing, HU Guocai, LIU Quan, et al. Optimal design for landing gear stiffness and damping based on helicopter ground resonance requirements [J]. Acta Aeronautica et Astronautica Sinica, 2018, 39(12): 170-179.
- [8] 魏钊, 龙腾, 李怀建, 等. 考虑附加力影响的弹性体远程火箭弹道分析 [J]. 机械工程学报, 2019, 55(12): 196-204.
WEI Zhao, LONG Teng, LI Huaijian, et al. Trajectory analysis of aeroelastic long-range rockets considering subsidiary load effect [J]. Journal of Mechanical Engineering, 2019, 55(12): 196-204.
- [9] 刘文芝, 黄科, 武建新, 等. 某型号固体火箭发动机推力矢量控制系统接触承载性能分析 [J]. 机械工程学报, 2012, 48(19): 148-155.
LIU Wenzhi, HUANG Ke, WU Jianxin, et al. Contact load-bearing performance analysis for thrust vector control system in a certain solid propellant rocket motor [J]. Journal of Mechanical Engineering, 2012, 48(19): 148-155.
- [10] 毕祥军, 陈炳全, 吴浩, 等. 运载火箭线式捆绑分离装置的设计、分析与优化 [J]. 机械工程学报, 2019, 55(14): 60-68.
BI Xiangjun, CHEN Bingquan, WU Hao, et al. Design, analysis and optimization of linear bundled separation device for launch vehicle [J]. Journal of Mechanical Engineering, 2019, 55(14): 60-68.
- [11] KINEFUCHI K, YAMAGUCHI H, MINAMI M, et al. In-flight S-band telemetry attenuation by ionized solid rocket motor plumes at high altitude [J]. Acta Astronautica, 2019, 165: 373-381.
- [12] GRIEGO C, YILMAZ N, ATMANLI A. Sensitivity analysis and uncertainty quantification on aluminum particle combustion for an upward burning solid rocket propellant [J]. Fuel, 2019, 237: 1177-1185.
- [13] GAO Yonggang, LIU Yang, CHAI Zexin, et al. Influence of lobe geometry on mixing and heat release characteristics of solid fuel rocket scramjet combustor [J]. Acta Astronautica, 2019, 164: 212-229.
- [14] BINAULD Q, LAMET J M, TESSÉ L, et al. Numerical simulation of radiation in high altitude solid

- propellant rocket plumes [J]. *Acta Astronautica*, 2019, 158: 351-360.
- [15] HASHIM S A, KARMAKAR S, ROY A. Effects of Ti and Mg particles on combustion characteristics of boron-HTPB-based solid fuels for hybrid gas generator in ducted rocket applications [J]. *Acta Astronautica*, 2019, 160: 125-137.
- [16] FU Pengfei, HOU Lingyun, REN Zhuyin, et al. A droplet/wall impact model and simulation of a bipropellant rocket engine [J]. *Aerospace Science and Technology*, 2019, 88: 32-39.
- [17] ACHARYA N, DAS K, KUNDU P K. On the heat transport mechanism and entropy generation in a nozzle of liquid rocket engine using ferrofluid: a computational framework [J]. *Journal of Computational Design and Engineering*, 2019, 6(4): 739-750.
- [18] LI Yue, HU Chunbo, ZHU Xiaofei, et al. Experimental study on combustion characteristics of powder magnesium and carbon dioxide in rocket engine [J]. *Acta Astronautica*, 2019, 155: 334-349.
- [19] DU Dahua, HE Erming, HUANG Daoqiong, et al. Intense vibration mechanism analysis and vibration control technology for the combustion chamber of a liquid rocket engine [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2018, 437: 53-67.
- [20] 刘绍学, 钱珮玲, 章建跃. 普通高中课程标准实验教科书: 数学(必修):2 [M]. 2版. 北京: 人民教育出版社, 2019: 74.
- [21] 尹云玉. 结构振动理论及火箭截面载荷识别 [M]. 北京: 中国宇航出版社, 2011: 64-74.
- [22] 章建跃, 李增沪, 李勇, 等. 普通高中教科书: 数学(必修):1 [M]. 北京: 人民教育出版社, 2019: 140.
- [23] LI Chaolong, ZHAO Xiang, XIA Zhixun, et al. Influence of the vortex generator on the performance of solid rocket scramjet combustor [J]. *Acta Astronautica*, 2019, 164: 174-183.
- [24] SHI Lei, ZHAO Guojun, YANG Yiyan, et al. Research progress on ejector mode of rocket-based combined-cycle engines [J]. *Progress in Aerospace Sciences*, 2019, 107: 30-62.
- [25] 张景绘, 张希农. 工程中的振动问题习题解答 [M]. 北京: 中国铁道出版社, 1983: 90-94.
- [本刊相关文献链接]**
- 贾谦, 王建磊, 崔展, 等. 引入螺旋槽制造误差的机械密封性能分析及优化. 2020, 54(11): 46-55. [doi:10.7652/xjtuxb202011006]
- 闫岗, 金英泽, 陈晖, 等. 超导可倾瓦磁液复合轴承的动力学特性分析. 2020, 54(11): 65-73. [doi:10.7652/xjtuxb202011008]
- 李翠, 程亦薇, 庄钰涵, 等. 液体火箭压差控制交叉输送特性研究. 2020, 54(4): 165-172. [doi:10.7652/xjtuxb202004020]
- 高中华, 兰海平, 潘辉, 等. 小通道内高参数火箭煤油流动传热特性研究. 2020, 54(1): 108-115. [doi:10.7652/xjtuxb202010104]
- 辛腾达, 王华, 崔村燕, 等. 贮箱轻量化设计几何参数优化方法. 2019, 53(7): 153-159. [doi:10.7652/xjtuxb202001014]
- 张赞坚, 刘朝晖, 潘辉, 等. 低流阻火箭煤油的超临界压力流动与换热特性. 2019, 53(1): 129-134. [doi:10.7652/xjtuxb201901017]
- 张英佳, 孙五川, 邓福泉, 等. N_2O 对乙烯自点火敏化作用的实验和理论研究. 2019, 53(1): 86-92. [doi:10.7652/xjtuxb201901011]
- 白治宁, 周景军, 蔡卫军, 等. 火箭助飞鱼雷分离舱张开特性试验与数值研究. 2018, 52(1): 136-142. [doi:10.7652/xjtuxb201801021]
- 张鹏鹏, 赵伟刚, 董光能. 铜基石墨密封材料的摩擦磨损性能研究. 2017, 51(9): 92-97. [doi:10.7652/xjtuxb201709013]
- 刘展, 孙培杰, 李鹏, 等. 升空过程中低温液氧贮箱压力变化及热分层研究. 2016, 50(11): 97-103. [doi:10.7652/xjtuxb201611015]

(编辑 武红江)