

# 确定土体破坏准则的一个新方法

俞茂宏<sup>1</sup>, 武霞霞<sup>1</sup>, 史俊<sup>2</sup>, 周广春<sup>2</sup>

(1. 西安交通大学机械结构强度与振动国家重点实验室, 710049, 西安;

2. 哈尔滨工业大学土木工程学院, 150006, 哈尔滨)

**摘要:** 为了完全解决理论上和工程应用中土体破坏准则的合理选用问题,总结了国内外106种土体在平面应变和常规三轴试验下摩擦角的试验结果,发现结果具有明显的规律性。同时,这些试验结果所体现出的规律与统一强度理论和统一滑移线场理论得出的理论结果高度吻合。根据这一发现,建立了破坏准则与平面应变、常规三轴试验条件下材料的强度参数之间的定量关系,由此提出了一个确定土体破坏准则的新方法。该准则具有简单的线性表达式,只需要用平面应变试验和常规三轴试验得到的摩擦角差值即可构建,便于工程应用。该研究结果也可推广应用于岩石材料、混凝土材料、工程塑料以及拉压强度不等的其他材料,更复杂的结果有待进一步验证。

**关键词:** 平面应变;常规三轴试验;统一强度理论;摩擦角;统一滑移线场理论

**中图分类号:** TB301 **文献标志码:** A

**DOI:** 10.7652/xjtuxb202008001 **文章编号:** 0253-987X(2020)08-0001-10



OSID 码

## A New Strategy for Determining Failure Criteria of Soil

YU Maohong<sup>1</sup>, WU Xiaxia<sup>1</sup>, SHI Jun<sup>2</sup>, ZHOU Guangchun<sup>2</sup>

(1. State Key Laboratory of Strength and Vibration of Mechanical Structures, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China; 2. College of Civil Engineering, Harbin Institute of Technology, Harbin 150006, China)

**Abstract:** To completely solve the problem of reasonable selection of failure criteria in theory and engineering application, the test results of friction angles of 106 kinds for soils at home and abroad under plane strain and conventional tri-axial tests are summarized, and an obvious regularity is found. The experimental results well coincide with the theoretical results of unified strength theory and unified slip line field theory. Analyzing the conclusion, the quantitative relationship of failure criterion with material strength parameters under plane strain and conventional tri-axial tests is established. Therefore, a new strategy for determining the failure criterion of soils is proposed, where the criterion with a simple linear expression is constructed in terms of only friction angle difference obtained from the plane strain test and the conventional tri-axial test. This strategy can also be applied to rock materials, concrete materials, engineering plastics and other materials with different tensile and compressive strength, and more complex results remain to be further verified.

**Keywords:** plane strain; conventional tri-axial test; unified strength theory; friction angle; unified slip line field theory

强度问题是各种工程结构共同的最基本要求, 而结构的强度分析与选用的破坏准则有关,在土木、

水利、岩土、道路、矿山等工程中,土的破坏准则成为一个重要理论基础。全世界有关学者进行了大量的理论和试验研究<sup>[1-5]</sup>,Humpheson<sup>[1]</sup>和 Naylor 曾经分析过一个条形基础的承载力问题,选用不同的破坏准则得出的结果可以相差很大。这些准则中哪些是合理的,应该选用什么准则,Humpheson 和 Naylor 并没有给与解决,且至今也没有得到解决。破坏准则的合理性问题首先应该确定其理论范围,对于岩土材料,偏平面为圆形的准则首先被排除在外。Mises 准则和 Drucker-Prager 准则在偏平面的极限面都是圆形。这个问题以往并没有被大家所重视,近年来很多著名学者都指出了这个问题。

20 世纪 80 年代,Chen 和 Zienkiewicz 等再次提出这个问题,但仍然没有得到足够的重视<sup>[2-3]</sup>。Chen 和 Zienkiewicz 指出,对于岩土材料,强度理论在偏平面的极限面不应该是一个圆,即与应力角有关。Drucker-Prager 准则无论是伸长锥、折衷锥、压缩锥还是内切锥,都与试验结果不符合。

2002 年,Davis 和 Selvadurai 指出,如果在平面应力状态下 Drucker-Prager 准则与试验结果的差别会更大<sup>[6]</sup>。Neto 和 Peric 等在文献[7]第 168 页也指出了这个问题。Ottersen 和 Ristinmaa 指出,应用 Drucker-Prager 准则应该小心谨慎。实际上,Drucker-Prager 准则只能应用于拉压强度相差较小的材料<sup>[8]</sup>。Yu 指出,Drucker-Prager 准则在岩土工程分析中得到广泛应用,但是试验结果表明,Drucker-Prager 准则在偏平面的圆形迹线与试验结果不符合,因此在岩土工程分析中应用 Drucker-Prager 准则需要十分谨慎<sup>[9]</sup>。

最近,Owen 等在 2008 年的学术著作中特别指出,Drucker-Prager 准则的外接锥和内切锥都不能很好地描述材料某些应力状态下的行为,其他近似准则可能更加适合<sup>[7]</sup>。

破坏准则的合理选用,在理论上和工程应用中都是一个没有完全解决的问题,本文将对这个问题进行进一步的探讨。

## 1 平面应变试验与常规三轴试验结果对比

除了破坏准则问题,在试验结果中所发现的一些问题也没有得到完全解决。例如,在岩土力学和岩土试验中,一般采用常规三轴试验(轴对称围压试验)得出材料的强度指标摩擦角  $\varphi$ ,但是 Wade 及 Cornforth 进行砂土的平面应变试验时发现,砂土在

平面应变条件下得出的土体材料的摩擦角  $\varphi_{ps}$  比常规三轴试验得出的摩擦角  $\varphi_0$  大很多<sup>[10]</sup>。1966 年,Henkel 和 Wade 进行了饱和重塑黏土的平面应变试验<sup>[11]</sup>;1974 年,Hussaini 进行了砂土的平面应变试验<sup>[12]</sup>;1977 年,Vaid 和 Campanella 进行了自然黏土的平面应变试验<sup>[13]</sup>,他们也都得出了同样的结果。

通过平面应变试验和常规三轴试验得出的材料强度指标  $\varphi$  有明显的差别,这种现象很快被黄文熙所注意。在改革开放之后,他研制了平面应变试验机,并指导研究生李树勤进行了“在平面应变条件下砂土本构关系的试验研究”,得出了明确的结论:无黏性土在平面应变条件下的本构特性同轴对称条件下有较大差别,在研究土的本构关系时不能忽视这些差别<sup>[14]</sup>。

本文总结了国内外 106 种关于岩土材料的平面应变试验相对于常规三轴试验的摩擦角的变化结果,可以看到,平面应变试验得出的岩土材料的峰值强度(摩擦角)一般比常规三轴的摩擦角大  $1.0^\circ \sim 7.0^\circ$ ,提高了  $2.8\% \sim 18.4\%$ 。

清华大学、河海大学、同济大学和水利水电科学研究院等单位的学者都进行了平面应变问题的研究。马险峰等基于大阪市立大学真三轴压缩试验装置开发了改良型平面应变仪,这种试验装置便于试样的放置,尤其是对于自立性较差的松散砂或软黏土试样,可同时进行拉伸试验。他们进行了砂的平面应变与常规三轴试验,并总结出不同研究者的关于内摩擦角的结果,如图 1a 所示,其他国内外的研究者得出的试验结果见图 1b,可见他们得出的试验结果一致,且分析结果也相同。

文献[15]指出,平面应变试验与常规三轴试验的差别主要在于中间主应力的不同,中间主应力对岩土材料的本构关系是有影响的,在理论上,这种影响将通过破坏准则反映到材料的本构关系中。清华大学陈仲颐、周景星、王洪瑾,北京交通大学赵成刚、白冰、王远霞,以及李广信、张丙印、于玉贞等都将平面应变试验的主要结果写进土力学教科书中,文献[16]指出,两种试验结果得出的摩擦角  $\varphi$  有明显的差别,这种差别就是由中间主应力不同引起的,由于 Mohr-Coulomb 理论存在着这种缺点,所以人们不断地致力于更完善的强度理论的研究与探索。

近年来,很多学者都对岩土材料的强度指标(摩擦角  $\varphi$ )在平面应变和三轴试验条件下的关系进行了研究。例如,马险峰等在试验的基础上,推导了平面应变条件下的砂土强度参数与三轴条件下参数的

换算关系<sup>[15]</sup>;栾茂田等以松冈元-中井准则为依据推导了强度指标间的换算关系<sup>[17]</sup>;龚文俊等结合 Lade-Duncan 强度准则,也建立了这两种试验下内摩擦角之间的转换公式<sup>[18]</sup>。

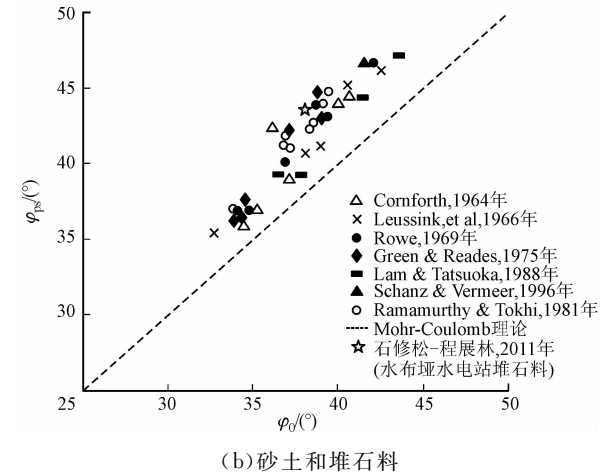
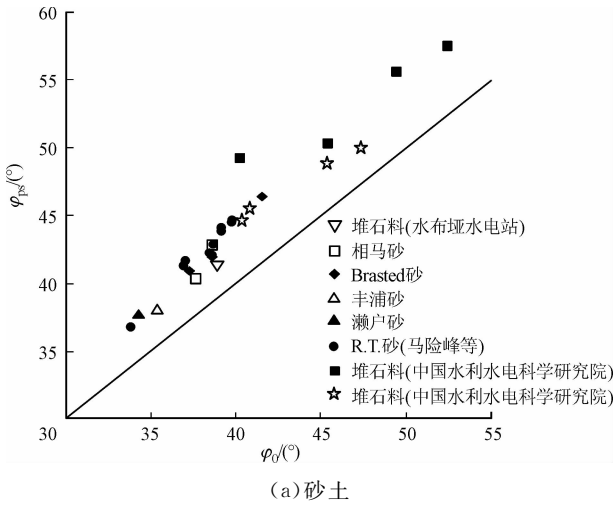


图 1 平面应变和常规三轴试验下材料的内摩擦角变化

2 岩土材料的极限面范围

Drucker 公设和破坏准则的外凸性已经成为了一般塑性力学的基本定理。破坏准则必须外凸且在图 2 所示的内边界和外边界之间,图中  $\sigma'_1, \sigma'_2, \sigma'_3$  为主应力  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  在  $\pi$  平面上的投影。Mohr-Coulomb 强度理论(单剪理论)和 1985 年发表的双剪强度理论共同界定了外凸理论的内、外边界。Mohr-Coulomb 强度理论的极限面为所有外凸极限轨迹的内边界(下限),没有任何其他外凸极限面可以小于 Mohr-Coulomb 极限面(单剪理论);双剪强度理论的极限面为所有外凸极限轨迹的外边界(上限),没有任何其他外凸极限面能超过双剪极限面。目前提出的各种各样的破坏准则,大多介于图 2 所

示的内边界和外边界之间,但是如何选用破坏准则的问题仍然没有得到解决。

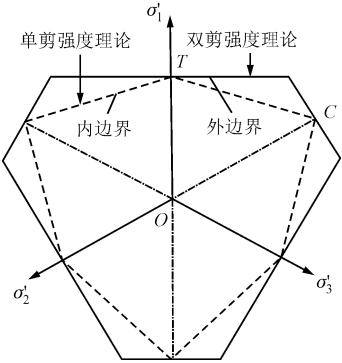


图 2 屈服面内外边界和外凸性

1991 年,俞茂宏提出统一强度理论,它的系列化的极限面如图 3 所示。统一强度理论是一系列破坏准则的集合,它覆盖了从内边界到外边界的全部区域,可以适用于不同的材料<sup>[19-20]</sup>。

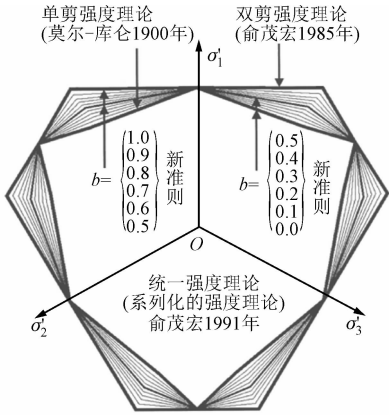


图 3 统一强度理论在偏平面的极限迹线

主应力形式的统一强度理论表述为

$$F = \sigma_1 - \frac{\alpha}{1+b} (b\sigma_2 + \sigma_3) = s_t, \sigma_2 \leq \frac{\sigma_1 + \alpha\sigma_3}{1+\alpha} \quad (1)$$

$$F' = \frac{1}{1+b} (\sigma_1 + b\sigma_2) - \alpha\sigma_3 = s_c, \sigma_2 \geq \frac{\sigma_1 + \alpha\sigma_3}{1+\alpha} \quad (2)$$

式中:  $\alpha = \frac{\sigma_1}{\sigma_c}$  为材料的拉压强度比;主应力之间的关系为  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ 。

在实际岩土工程中,常常采用材料黏聚力  $C_0$  和内摩擦角  $\varphi_0$  作为基本的试验参数,这时统一强度理论可表述为

$$F = \left[ \sigma_1 - \frac{1}{1+b} (b\sigma_2 + \sigma_3) \right] +$$

$$\left[ \sigma_1 + \frac{1}{1+b} (b\sigma_2 + \sigma_3) \right] \sin\varphi_0 = 2C_0 \cos\varphi_0, \quad (3)$$

$$\sigma_2 \leq \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \sin\varphi_0$$

$$F' = \left[ \frac{1}{1+b} (b\sigma_2 + \sigma_1) - \sigma_3 \right] +$$

$$\left[ \frac{1}{1+b} (b\sigma_2 + \sigma_1) + \sigma_3 \right] \sin\varphi_0 = 2C_0 \cos\varphi_0, \quad (4)$$

$$\sigma_2 \geq \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \sin\varphi_0$$

如式(1)(2)所示,随着统一强度理论参数  $b$  由 0 到 1 的变化,统一强度理论可以转化为各种准则,而且还产生了一系列新的破坏准则。综上所述可以看到,极限面的形状和大小随着参数  $b$  有规律地变化。 $b$  值越大,极限面也越大。在所有外凸极限面中, $b=0$  的单剪强度理论的极限面最小; $b=1$  的双剪强度理论的极限面最大; $b=0.5$  的统一强度理论极限面则介于单剪和双剪强度理论极限面的中间。统一强度理论的一系列外凸极限面可以十分灵活地适用各种不同材料。但是,如何选择强度理论参数(即破坏准则)仍然没有得到解决。

确定参数  $b$  的一种理想方法是通过材料的真三轴试验得出材料的极限线,将其与统一强度理论系列极限线进行对比,就可以得出参数  $b$  值。真三轴试验的结果虽然可靠,但是世界各国的真三轴试验机并不多,并且要得出合适的参数  $b$  值,就必须使用真三轴试验机进行大量试验,投入的成本较高且所需时间周期较长。因此,在实际应用中,如果需要快速确定破坏准则真三轴试验并不是最好的选择。

根据 Drucker 公设的外凸性,破坏准则应该在内外边界之内。对于实际工程材料,需要研究破坏准则的确定方法,这也成为一个现实问题,本文将对这个问题作进一步的研究。

### 3 基于平面应变和常规三轴试验的摩擦角差值的破坏准则

根据平面应变统一滑移线场理论<sup>[21]</sup>,可以建立统一强度理论和滑移线场理论摩擦角  $\varphi$  之间的关系如下

$$\sin\varphi_{\text{UST}} = \frac{2(1+b)\sin\varphi_0}{2+b+b\sin\varphi_0} \quad (5)$$

式中: $\varphi_{\text{UST}}$  为统一内摩擦角。

由式(5)可知,如果两种试验得出的摩擦角已知,则可以反推出统一强度理论参数  $b$  的表达式为

$$b = \frac{2(\sin\varphi_{\text{UST}} - \sin\varphi_0)}{2\sin\varphi_0 - (1 + \sin\varphi_0)\sin\varphi_{\text{UST}}} \quad (6)$$

从式(6)可以看出,只要知道平面应变和常规三轴试验条件下得出的摩擦角  $\varphi$  就可以求得参数  $b$  值。这时,只要进行平面应变,得出一个参数即可,十分方便。根据本文推出的式(6),可以作出摩擦角  $\varphi_{\text{UST}}$  和统一强度理论参数  $b$  之间的关系曲线,如图 4 所示,从中可以看出它们之间的一些变化规律。

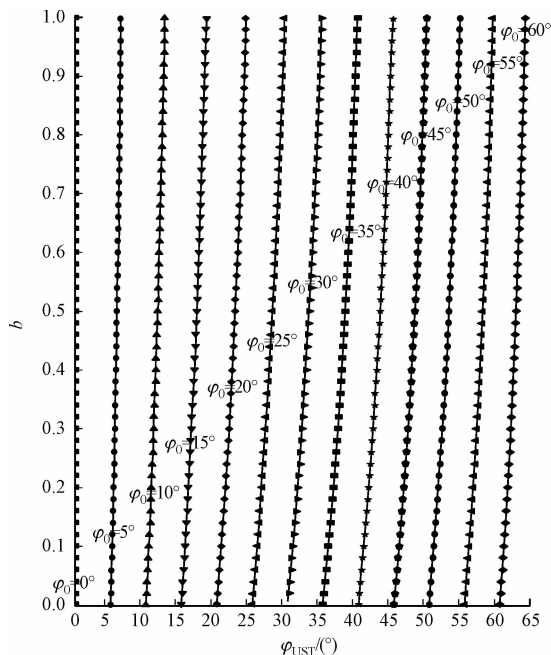


图 4 参数  $b$  和摩擦角  $\varphi_{\text{UST}}$  之间的关系曲线

## 4 土体破坏准则的确定

平面应变试验方法已经逐步得到推广,它与常规三轴试验得出的峰值强度指标有明显的差别,这种差别没有理论上的联系,式(6)通过统一强度理论将它们联系了起来。下面,将本文提出的参数  $b$  的计算方法应用到实际材料中。本文搜集并总结了国内外大量平面应变试验和常规三轴试验的数据结果<sup>[15-17,22-41]</sup>,其中石修松、陈展林等对各种堆石料和岩石材料,以及 Hanna 对不同质量密度、颗粒形状、孔隙比等的干硅砂都进行了大量常规三轴试验和平面应变试验。将这些试验数据代入本文提出的计算式(6),可求得参数  $b$  的值。为了规范,本文  $b$  值取到小数点后一位,即  $b=0.0, 0.1, 0.2, \dots, 1.0$ ,如表 1 最右一列所示。将  $b$  值带入式(1)(2),即可得出土体破坏准则的具体公式。

从表 1 可以看到,各种材料的平面应变试验得出的摩擦角明显高于常规三轴试验得出的摩擦角。

表 1 土体破坏准则的确定

| 编号 | 试验人           | 时间   | 材料                                            | 摩擦角 $\varphi/(^{\circ})$ |      | 摩擦角差<br>$/(^{\circ})$ | 比率<br>$\%$ | 统一强度<br>理论参数<br>$b$ |
|----|---------------|------|-----------------------------------------------|--------------------------|------|-----------------------|------------|---------------------|
|    |               |      |                                               | 常规三轴                     | 平面应变 |                       |            |                     |
| 1  | Wade          | 1963 | 密细砂                                           | 40.7                     | 42.7 | 2.0                   | 4.9        | 0.3                 |
| 2  | Cornforth     | 1964 | 密砂                                            | 41.7                     | 46.0 | 4.3                   | 10.3       | 0.8                 |
| 3  | Cornforth     | 1964 | 中密砂                                           | 39.0                     | 43.7 | 4.7                   | 12.0       | 0.9                 |
| 4  | Cornforth     | 1964 | 中砂                                            | 35.9                     | 38.0 | 2.1                   | 5.9        | 0.3                 |
| 5  | Cornforth     | 1964 | 松砂                                            | 33.5                     | 34.0 | 0.5                   | 1.5        | 0.7                 |
| 6  | Lee           | 1970 | 密砂 ( $f=3\text{ kg/cm}^2$ )                   | 39.0                     | 42.6 | 3.6                   | 9.2        | 0.6                 |
| 7  | Lee           | 1970 | 密砂 ( $f=5\text{ kg/cm}^2$ )                   | 35.4                     | 36.4 | 1.0                   | 2.8        | 0.1                 |
| 8  | Green         | 1972 | 密河砂                                           | 39.0                     | 44.0 | 5.0                   | 12.8       | 1.0                 |
| 9  | 市原松平          | 1973 | 细砂                                            | 36.1                     | 37.3 | 1.2                   | 3.3        | 0.2                 |
| 10 | Yamaguchi H 等 | 1976 | Toyoura 砂                                     | 41.0                     | 46.0 | 5.0                   | 12.2       | 1.0                 |
| 11 | 李树勤           | 1982 | 中密承德砂 ( $f=1\text{ kg/cm}^2$ )                | 36.3                     | 41.3 | 5.0                   | 13.8       | 1.0                 |
| 12 | 李树勤           | 1982 | 中密承德砂 ( $f=3\text{ kg/cm}^2$ )                | 35.0                     | 40.2 | 5.2                   | 14.9       | 1.0                 |
| 13 | 李树勤           | 1982 | 中密承德砂 ( $f=5\text{ kg/cm}^2$ )                | 34.7                     | 39.8 | 5.1                   | 14.7       | 1.0                 |
| 14 | T Nakal 等     | 1983 | Toyoura 砂                                     | 40.0                     | 44.5 | 4.5                   | 11.3       | 0.9                 |
| 15 | 李树勤           | 1983 | 中细承德砂                                         | 35.3                     | 40.4 | 5.1                   | 14.4       | 1.1                 |
| 16 | 李兴国           | 1984 | 小浪底黏土                                         | 21.0                     | 24.0 | 3.0                   | 14.3       | 0.6                 |
| 17 | 李兴国           | 1984 | 茅坪壤土                                          | 35.0                     | 39.4 | 4.4                   | 12.5       | 0.8                 |
| 18 | 李兴国           | 1984 | 风化砂砾 ( $\rho=1.40\text{ g/cm}^{-3}$ )         | 32.5                     | 38.0 | 5.5                   | 16.9       | 1.2                 |
| 19 | 林永生           | 1985 | 风化砂砾 ( $\rho=1.64\text{ g/cm}^{-3}$ )         | 35.0                     | 39.5 | 4.5                   | 12.9       | 0.8                 |
| 20 | 李兴国 等         | 1985 | 新淤积砂 ( $\rho=1.35\text{ g/cm}^{-3}$ )         | 33.3                     | 38.5 | 5.2                   | 15.6       | 1.1                 |
| 21 | 李兴国 等         | 1985 | 新淤积砂 ( $\rho=1.45\text{ g/cm}^{-3}$ )         | 37.5                     | 41.6 | 4.1                   | 10.9       | 0.7                 |
| 22 | 李兴国 等         | 1988 | 新淤积砂 ( $\rho=1.55\text{ g/cm}^{-3}$ )         | 38.4                     | 41.5 | 3.1                   | 8.1        | 0.5                 |
| 23 | 刑义川           | 1985 | Q <sub>2</sub> 原状黄土                           | 21.6                     | 25.0 | 3.4                   | 15.7       | 0.7                 |
| 24 | 殷宗泽 等         | 1990 | 前苇园土                                          | 31.0                     | 34.0 | 3.0                   | 9.7        | 0.5                 |
| 25 | 殷宗泽 等         | 1990 | 西河清土                                          | 30.2                     | 36.4 | 6.2                   | 20.5       | 1.6                 |
| 26 | 柏树田 等         | 1991 | 小浪底细砂岩堆石料 ( $p=200\text{ kPa}$ ) <sup>A</sup> | 46.2                     | 50.4 | 4.2                   | 9.1        | 0.8                 |
| 27 | 柏树田 等         | 1991 | 小浪底细砂岩堆石料 ( $p=400\text{ kPa}$ ) <sup>A</sup> | 43.6                     | 48.9 | 5.3                   | 12.2       | 1.2                 |
| 28 | 柏树田 等         | 1991 | 小浪底细砂岩堆石料 ( $p=600\text{ kPa}$ ) <sup>A</sup> | 43.2                     | 46.8 | 3.6                   | 8.3        | 0.6                 |
| 29 | 柏树田 等         | 1991 | 小浪底细砂岩堆石料 ( $p=800\text{ kPa}$ ) <sup>A</sup> | 42.0                     | 45.3 | 3.3                   | 7.9        | 0.6                 |
| 30 | 柏树田 等         | 1991 | 小浪底细砂岩堆石料 ( $p=200\text{ kPa}$ ) <sup>B</sup> | 43.8                     | 47.9 | 4.1                   | 9.4        | 0.8                 |
| 31 | 柏树田 等         | 1991 | 小浪底细砂岩堆石料 ( $p=400\text{ kPa}$ ) <sup>B</sup> | 40.9                     | 46.8 | 5.9                   | 14.4       | 1.4                 |
| 32 | 柏树田 等         | 1991 | 小浪底细砂岩堆石料 ( $p=600\text{ kPa}$ ) <sup>B</sup> | 40.9                     | 46.2 | 5.3                   | 12.9       | 1.1                 |
| 33 | 柏树田 等         | 1991 | 小浪底细砂岩堆石料 ( $p=800\text{ kPa}$ ) <sup>B</sup> | 40.9                     | 44.0 | 3.1                   | 7.6        | 0.5                 |
| 34 | 柏树田 等         | 1991 | 天生桥灰岩堆石料 ( $p=200\text{ kPa}$ ) <sup>A</sup>  | 54.6                     | 57.0 | 2.4                   | 4.4        | 0.4                 |
| 35 | 柏树田 等         | 1991 | 天生桥灰岩堆石料 ( $p=400\text{ kPa}$ ) <sup>A</sup>  | 51.4                     | 51.4 | 0.0                   | 0          | 0.0                 |
| 36 | 柏树田 等         | 1991 | 天生桥灰岩堆石料 ( $p=800\text{ kPa}$ ) <sup>A</sup>  | 51.2                     | 52.8 | 1.6                   | 3.1        | 0.2                 |
| 37 | 柏树田 等         | 1991 | 天生桥灰岩堆石料 ( $p=200\text{ kPa}$ ) <sup>B</sup>  | 47.7                     | 49.9 | 2.2                   | 4.6        | 0.3                 |
| 38 | 柏树田 等         | 1991 | 天生桥灰岩堆石料 ( $p=600\text{ kPa}$ ) <sup>B</sup>  | 46.4                     | 48.4 | 2.0                   | 4.3        | 0.3                 |
| 39 | 柏树田 等         | 1991 | 天生桥灰岩堆石料 ( $p=800\text{ kPa}$ ) <sup>B</sup>  | 45.5                     | 47.7 | 2.2                   | 4.8        | 0.3                 |

续表

| 编号 | 试验人                | 时间    | 材料                        | 摩擦角 $\varphi/(^{\circ})$ |      | 摩擦角差<br>$/(^{\circ})$ | 比率<br>$/\%$ | 统一强度<br>理论参数<br>$b$ |
|----|--------------------|-------|---------------------------|--------------------------|------|-----------------------|-------------|---------------------|
|    |                    |       |                           | 常规三轴                     | 平面应变 |                       |             |                     |
| 40 | Mochizuki A        | 1993  | Toyoura 砂                 | 34.4                     | 37.9 | 3.5                   | 10.2        | 0.6                 |
| 41 | Mochizuki A        | 1993  | Seto 砂                    | 35.4                     | 38.3 | 2.9                   | 8.2         | 0.5                 |
| 42 | 程展林 等              | 1995  | 三峡石碴                      | 42.0                     | 43.4 | 1.4                   | 3.4         | 0.2                 |
| 43 | Yumlu M 等          | 1995  | 煤                         | 30.0                     | 30.0 | 0.0                   | 0           | 0.0                 |
| 44 | Yumlu M 等          | 1995  | 砂岩                        | 52.0                     | 52.0 | 0.0                   | 0           | 0.0                 |
| 45 | Yumlu M 等          | 1995  | 石英岩                       | 53.0                     | 55.0 | 2.0                   | 3.8         | 0.3                 |
| 46 | Yumlu M 等          | 1995  | 辉长岩                       | 65.0                     | 68.0 | 3.0                   | 4.6         | 0.9                 |
| 47 | 郭熙灵 等              | 1997  | 三峡石碴( $p=600$ kPa)        | 45.1                     | 49.3 | 4.2                   | 9.3         | 0.8                 |
| 48 | 郭熙灵 等              | 18997 | 三峡石碴( $p=700$ kPa)        | 44.5                     | 48.4 | 3.9                   | 8.8         | 0.7                 |
| 49 | Kurukulasuriya L C | 1999  | 高岭土( $w=57.7\%$ )         | 25.3                     | 26.8 | 1.5                   | 5.9         | 0.2                 |
| 50 | Kurukulasuriya L C | 1999  | 高岭土( $w=45.6\%$ )         | 23.3                     | 23.5 | 0.2                   | 0.9         | 0.0                 |
| 51 | Hanna A            | 2001  | 干硅砂( $n=28\%, p=172$ kPa) | 41.0                     | 47.0 | 6.0                   | 14.6        | 1.5                 |
| 52 | Hanna A            | 2001  | 干硅砂( $n=33\%, p=172$ kPa) | 38.5                     | 42.5 | 4.0                   | 10.4        | 0.7                 |
| 53 | Hanna A            | 2001  | 干硅砂( $n=35\%, p=172$ kPa) | 37.0                     | 41.0 | 4.0                   | 10.8        | 0.7                 |
| 54 | Hanna A            | 2001  | 干硅砂( $n=38\%, p=172$ kPa) | 35.0                     | 38.0 | 3.0                   | 8.6         | 0.5                 |
| 55 | Hanna A            | 2001  | 干硅砂( $n=40\%, p=172$ kPa) | 34.0                     | 36.5 | 2.5                   | 7.4         | 0.4                 |
| 56 | Hanna A            | 2001  | 干硅砂( $n=44\%, p=172$ kPa) | 32.5                     | 33.0 | 0.5                   | 1.5         | 0.1                 |
| 57 | Hanna A            | 2001  | 干硅砂( $n=33\%, p=172$ kPa) | 43.0                     | 47.5 | 4.5                   | 10.5        | 0.9                 |
| 58 | Hanna A            | 2001  | 干硅砂( $n=35\%, p=172$ kPa) | 40.5                     | 46.5 | 6.0                   | 14.8        | 1.5                 |
| 59 | Hanna A            | 2001  | 干硅砂( $n=38\%, p=172$ kPa) | 39.0                     | 42.5 | 3.5                   | 9.0         | 0.6                 |
| 60 | Hanna A            | 2001  | 干硅砂( $n=40\%, p=172$ kPa) | 37.0                     | 40.5 | 3.5                   | 9.5         | 0.6                 |
| 61 | Hanna A            | 2001  | 干硅砂( $n=42\%, p=172$ kPa) | 35.5                     | 39.0 | 3.5                   | 9.9         | 0.6                 |
| 62 | Hanna A            | 2001  | 干硅砂( $n=48\%, p=172$ kPa) | 33.5                     | 34.0 | 0.5                   | 1.5         | 0.1                 |
| 63 | Hanna A            | 2001  | 干硅砂( $n=29\%, p=172$ kPa) | 45.5                     | 48.0 | 2.5                   | 6.6         | 0.4                 |
| 64 | Hanna A            | 2001  | 干硅砂( $n=32\%, p=172$ kPa) | 44.0                     | 47.5 | 3.5                   | 8.0         | 0.6                 |
| 65 | HannaA             | 2001  | 干硅砂( $n=35\%, p=172$ kPa) | 41.0                     | 45.0 | 4.0                   | 9.8         | 0.7                 |
| 66 | Hanna A            | 2001  | 干硅砂( $n=42\%, p=172$ kPa) | 38.0                     | 38.5 | 0.5                   | 1.3         | 0.1                 |
| 67 | Hanna A            | 2001  | 干硅砂( $n=46\%, p=172$ kPa) | 34.5                     | 35.0 | 0.5                   | 1.4         | 0.1                 |
| 68 | Hanna A            | 2001  | 干硅砂( $n=28\%, p=344$ kPa) | 39.0                     | 45.0 | 6.0                   | 15.4        | 1.4                 |
| 69 | Hanna A            | 2001  | 干硅砂( $n=32\%, p=344$ kPa) | 37.0                     | 42.0 | 5.0                   | 13.5        | 1.0                 |
| 70 | Hanna A            | 2001  | 干硅砂( $n=35\%, p=344$ kPa) | 35.0                     | 39.0 | 4.0                   | 11.4        | 0.7                 |
| 71 | Hanna A            | 2001  | 干硅砂( $n=37\%, p=344$ kPa) | 34.0                     | 37.0 | 3.0                   | 8.8         | 0.5                 |
| 72 | Hanna A            | 2001  | 干硅砂( $n=44\%, p=344$ kPa) | 32.0                     | 32.5 | 0.5                   | 1.6         | 0.1                 |
| 73 | Hanna A            | 2001  | 干硅砂( $n=33\%, p=344$ kPa) | 42.0                     | 46.0 | 4.0                   | 9.5         | 0.7                 |
| 74 | Hanna A            | 2001  | 干硅砂( $n=35\%, p=344$ kPa) | 38.0                     | 41.0 | 3.0                   | 7.9         | 0.5                 |
| 75 | Hanna A            | 2001  | 干硅砂( $n=38\%, p=344$ kPa) | 37.0                     | 40.6 | 3.6                   | 9.4         | 0.6                 |
| 76 | Hanna A            | 2001  | 干硅砂( $n=42\%, p=344$ kPa) | 34.5                     | 36.0 | 1.5                   | 4.3         | 0.2                 |
| 77 | Hanna A            | 2001  | 干硅砂( $n=46\%, p=344$ kPa) | 33.0                     | 33.5 | 0.5                   | 1.5         | 0.1                 |
| 78 | Hanna A            | 2001  | 干硅砂( $n=29\%, p=344$ kPa) | 45.5                     | 49.5 | 4.0                   | 8.8         | 0.8                 |

续表

| 编号  | 试验人            | 时间   | 材料                                      | 摩擦角 $\varphi/(^{\circ})$ |       | 摩擦角差<br>$\wedge/(^{\circ})$ | 比率<br>/ $\%$ | 统一强度<br>理论参数<br>$b$ |
|-----|----------------|------|-----------------------------------------|--------------------------|-------|-----------------------------|--------------|---------------------|
|     |                |      |                                         | 常规三轴                     | 平面应变  |                             |              |                     |
| 79  | Hanna A        | 2001 | 干硅砂( $n=32\%$ , $p=344$ kPa)            | 43.5                     | 45.5  | 2.0                         | 4.6          | 0.3                 |
| 80  | Hanna A        | 2001 | 干硅砂( $n=36\%$ , $p=344$ kPa)            | 41.0                     | 43.0  | 2.0                         | 4.9          | 0.3                 |
| 81  | Hanna A        | 2001 | 干硅砂( $n=42\%$ , $p=344$ kPa)            | 36.0                     | 40.0  | 4.0                         | 11.1         | 0.7                 |
| 82  | Hanna A        | 2001 | 干硅砂( $n=46\%$ , $p=344$ kPa)            | 34.0                     | 34.5  | 0.5                         | 1.5          | 0.1                 |
| 83  | 栾茂田 等          | 2004 | 黏土 <sup>A</sup>                         | 10.1                     | 11.6  | 1.5                         | 15.0         | 0.5                 |
| 84  | 栾茂田 等          | 2004 | 黏土 <sup>B</sup>                         | 15.0                     | 17.3  | 2.3                         | 15.3         | 0.5                 |
| 85  | 栾茂田 等          | 2004 | 黏土 <sup>C</sup>                         | 20.0                     | 22.9  | 2.9                         | 14.5         | 0.6                 |
| 86  | 马险峰 等          | 2006 | 丰浦砂                                     | 34.4                     | 37.9  | 3.5                         | 10.1         | 0.6                 |
| 87  | 马险峰 等          | 2006 | 濂户砂                                     | 35.4                     | 38.3  | 2.9                         | 8.2          | 0.5                 |
| 88  | Wanatowski D 等 | 2007 | 樟宜松砂                                    | 33.4                     | 36.0  | 2.6                         | 7.8          | 0.4                 |
| 89  | 施维成 等          | 2011 | 粗粒土( $\rho=1.54$ g/cm <sup>-3</sup> )   | 56.4                     | 60.3  | 3.9                         | 6.9          | 1.0                 |
| 90  | 施维成 等          | 2011 | 粗粒土( $\rho=1.68$ g/cm <sup>-3</sup> )   | 53.0                     | 55.9  | 2.9                         | 5.5          | 0.6                 |
| 91  | 施维成 等          | 2011 | 粗粒土( $\rho=1.82$ g/cm <sup>-3</sup> )   | 51.0                     | 54.3  | 3.3                         | 6.5          | 0.6                 |
| 92  | 施维成 等          | 2011 | 粗粒土( $\rho=1.96$ g/cm <sup>-3</sup> )   | 49.4                     | 52.3  | 2.9                         | 5.9          | 0.5                 |
| 93  | 石修松 等          | 2011 | 密松堆石料( $\rho=2.15$ g/cm <sup>-3</sup> ) | 39.44                    | 42.82 | 3.38                        | 8.6          | 0.6                 |
| 94  | 石修松 等          | 2011 | 密松堆石料( $\rho=2.27$ g/cm <sup>-3</sup> ) | 38.75                    | 40.91 | 2.16                        | 5.6          | 0.3                 |
| 95  | 石修松 等          | 2011 | 水布垭堆石料                                  | 38.79                    | 41.5  | 2.71                        | 7.0          | 0.4                 |
| 96  | 程展林 等          | 2011 | 辉石角闪岩料                                  | 38.7                     | 40.9  | 2.2                         | 5.7          | 0.3                 |
| 97  | 程展林 等          | 2011 | 斑晶花岗片麻岩料                                | 35.9                     | 40.9  | 5.0                         | 13.9         | 1.0                 |
| 98  | Gong G         | 2012 | 密砂                                      | 26.0                     | 30.0  | 4.0                         | 15.4         | 0.9                 |
| 99  | Gong G         | 2012 | 中砂                                      | 21.0                     | 24.8  | 3.8                         | 18.1         | 0.8                 |
| 100 | 罗爱忠 等          | 2015 | 西安 Q <sub>3</sub> 黄土( $w=5\%$ )         | 22.45                    | 26.57 | 4.12                        | 18.4         | 0.9                 |
| 101 | 罗爱忠 等          | 2015 | 西安 Q <sub>3</sub> 黄土( $w=10\%$ )        | 20.29                    | 24.38 | 4.09                        | 20.2         | 1.0                 |
| 102 | 罗爱忠 等          | 2015 | 西安 Q <sub>3</sub> 黄土( $w=15\%$ )        | 18.18                    | 22.45 | 4.27                        | 23.5         | 1.1                 |
| 103 | 王沙沙            | 2016 | 日本丰浦砂( $p=50$ kPa)                      | 10.9                     | 12.3  | 1.4                         | 12.8         | 0.4                 |
| 104 | 王沙沙            | 2016 | 日本丰浦砂( $p=100$ kPa)                     | 17.2                     | 18.7  | 1.5                         | 8.7          | 0.3                 |
| 105 | 王沙沙            | 2016 | 日本丰浦砂( $p=150$ kPa)                     | 18.8                     | 20.1  | 1.3                         | 6.9          | 0.2                 |
| 106 | 王沙沙            | 2016 | 日本丰浦砂( $p=200$ kPa)                     | 23.8                     | 24.4  | 0.6                         | 2.5          | 0.1                 |

注: $f$  表示材料的固结压力; $\rho$  表示密度; $w$  表示含水率(质量分数); $p$  表示围压; $n$  表示孔隙率;A、B、C 表示不同试验方式或者条件。

强度理论参数  $b$  值可按本文式(6)或图 4 求出。从表 1 还可看出,两种摩擦角的差值越大, $b$  值也就越大。分析表 1 可知,在 106 组试验中除编号为 15、18、25、27、31、32、51、58、68、102 的试验外,其余组材料计算得出的参数  $b$  值都在 0 到 1 之间。综上所述,使用本文提出的方法求得参数  $b$  值从而得出土体的破坏准则的方法是可行的,也是合理的。将得到的  $b$  值带入式(1)(2)即可得出材料具体的破坏准则。

事例:采用 2011 年施维成等的粗粒土的试验结果<sup>[36]</sup>,按本文式(6)得出强度理论参数  $b=0.5$ ,如表 1 第 99 项所示,将强度参数  $b=0.5$  带入式(1)(2),即可得出该粗粒土的破坏准则为

$$F=\sigma_1-\frac{\alpha}{1+b}(b\sigma_2+\sigma_3)=\sigma_t,\sigma_2\leqslant\frac{\sigma_1+\alpha\sigma_3}{1+\alpha}$$

(7)

$$F=\sigma_1-\frac{\alpha}{1+0.5}(0.5\sigma_2+\sigma_3)=\sigma_t$$

$$F = \sigma_1 - \frac{\alpha}{3}(\sigma_2 + 2\sigma_3) = \sigma_t$$

$$F' = \frac{1}{1+b}(\sigma_1 + b\sigma_2) - \alpha\sigma_3 = \sigma_t, \sigma_2 \geq \frac{\sigma_1 + \alpha\sigma_3}{1+\alpha} \quad (8)$$

$$F' = \frac{1}{1+0.5}(\sigma_1 + 0.5\sigma_2) - \alpha\sigma_3 = \sigma_t$$

$$F' = \frac{1}{3}(2\sigma_1 + \sigma_2) - \alpha\sigma_3 = \sigma_t$$

根据 1991 年柏树田对小浪底细砂岩的试验结果<sup>[28]</sup>,按本文方法计算得出该材料强度理论参数  $b=0.8$ ,由此即可得出小浪底细砂岩破坏准则为

$$F = \sigma_1 - \frac{\alpha}{9}(4\sigma_2 + 5\sigma_3) = \sigma_t$$

$$F' = \frac{1}{9}(5\sigma_1 + 4\sigma_2) - \alpha\sigma_3 = \sigma_t$$

根据 1995 年程展林的三峡石碛的试验结果<sup>[30]</sup>,按本文的方法计算得出该材料强度理论参数  $b=0.2$ ,由此即可得出三峡石碛破坏准则为

$$F = \sigma_1 - \frac{\alpha}{6}(\sigma_2 + 5\sigma_3) = \sigma_t$$

$$F' = \frac{1}{6}(5\sigma_1 + \sigma_2) - \alpha\sigma_3 = \sigma_t$$

从上面结果可以看到,得出的土体破坏准则具有简单的线性表达式,应用十分方便。同时,也可以指出,对国内外学者发表的有关论文,都能按本文的方法补充上新的研究结果。

## 5 结论和讨论

目前,世界上已经提出了众多关于岩土材料的破坏准则,但如何选用的问题一直没有很好的解决。平面应变试验和常规三轴试验得出的摩擦角  $\varphi$  之间的差别已经被逐步认识,但如何将它们和破坏准则联系起来也没有得到解决。

本文将统一强度理论和统一滑移线场理论相结合,建立了破坏准则和在平面应变、常规三轴试验条件下摩擦角差值之间的定量关系,并将其应用于实际材料中。最后总结了国内外的 106 种试验结果,得出的规律化结果与本文推出的理论关系高度符合。

本文将土体破坏准则研究从理论研究试验验证发展为一个可以量化的阶段,为土体材料破坏准则的确定提供一个可行的方法,可供工程应用参考。

(1)本文确定土体材料破坏准则的方法只需平面应变和常规三轴摩擦角的差值一个数值即可,不需要更多的参数,应用十分简单。

(2)本文得出土体破坏准则具有简单的线性表

达式,便于计算机分析应用,也可供手工计算应用。

(3)本文得出土体破坏准则是一种分段线性的破坏准则,在计算机的分析中,它角点的变形存在奇异性即不确定性,这个问题曾经被认为是一个难点,现在已经可以通过很简单的方法进行处理。因此,分段线性破坏准则的角点奇异性问题已经得到解决。实际上,Mohr-Coulomb 准则也存在角点奇异性问题,但现在已经大量装入计算机,并没有引起困难。

(4)表 1 中本文的参数计算取小数点后一位数,由此得到的  $b=0.0, 0.1, 0.2, \dots, 1.0$  的 11 条极限迹线与图 3 的 11 条极限迹线相对应,这些基本上可满足工程实际需要。

(5)表 1 中编号为 15、18、25、27、31、32、51、58、68、102 的材料  $b$  值均大于 1,可以按  $b=1$  来计算。

(6)理论结果必须得到试验的检验,反过来,试验也应该有相应的理论指导,如果试验结果得出的强度理论参数  $b$  值过大,可以认为这一类试验结果存在一定的问题,建议重新进行试验。

(7)Drucker-Prager 准则目前在岩土工程中得到广泛的应用,但是它在偏平面上的极限迹线为圆形,这在理论上是不合理的,在试验上也与岩土材料的实际情况不相符合,这一点已被 Zienkiewicz-Pande、陈惠发、Davis、Selvadurai、Owen、Neto、Ottersen、余海岁等世界著名学者多次指出,但是在国内似乎还没引起足够的重视,它的应用可能产生很大的误差,需要十分谨慎。

(8)土力学中的经典问题如条形基础的极限承载力、边坡的稳定性等问题都是根据钢塑性假设的滑移线场理论得出的,本文也采用了钢塑性假设的滑移线场理论。实际的土体一般认为是弹塑性材料和弹塑性软化材料,因此本文的结果和土力学的经典问题一样都是一种理论成果,更复杂的结果有待进一步验证。

## 参考文献:

- [1] HUMPHESON C, NAYLOR D J. The importance of the form of the failure criterion: C/R/243/75 [R]. Swansea, UK: University of Wales, 1975.
- [2] CHEN W F, SALEEB A F. Preface [M]// Constitutive Equations for Engineering Materials-Elasticity and Modeling. Amsterdam, Holland: Elsevier, 1994: IX-X.
- [3] ZIENKIEWICZ O C, PANDE G N. Some useful forms of isotropic yield surfaces for soil and rock me-

- chanics [M]//GUDEHUS G. Finite Elements in Geomechanics. London, UK: Wiley, 1977: 179-190.
- [4] 俞茂宏. 强度理论新体系 [M]. 西安: 西安交通大学出版社, 1992: 20-32.
- [5] 俞茂宏. 双剪理论及其应用 [M]. 北京: 科学出版社, 1998: 249-338.
- [6] DAVIS R O, SELVADURAI A P S. Plasticity and geomechanics [M]. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 2002: 65-74.
- [7] DE SOUZA NETO E A, PERI D, OWEN D R J. Computational methods for plasticity [M]. Chichester, UK: John Wiley & Sons Ltd., 2008: 143-168.
- [8] OTTOSEN N S, RISTINMAA M. Thermodynamic framework for constitutive modeling [M]// The Mechanics of Constitutive Modeling. Amsterdam, Holland: Elsevier, 2005: 551-589.
- [9] YU Hai-Sui. Plasticity and geotechnics [EB/OL]. [2019-11-01]. <https://link.springer.com/book/10.1007%2F978-0-387-33599-5>.
- [10] CORNFORTH D H. Some experiments on the influence of strain conditions on the strength of sand [J]. Géotechnique, 1964, 14(2): 143-167.
- [11] HENKEL D J, WADE N H. Plane strain tests on a saturated remolded clay [J]. Journal of Soil Mechanics & Foundations Div, 1966, 92(6): 67-80.
- [12] AL-HUSSAINI M M. Influence of relative density on the strength and deformation of sand under plane strain conditions [M]//Evaluation of Relative Density and its Role in Geotechnical Projects Involving Cohesionless Soils. West Conshohocken, PA, USA: ASTM International, 1973: 332-332-16.
- [13] VAID Y P, CAMPANELLA R G. Triaxial and plane strain behaviour of natural clay [J]. ASCE Journal of Geotechnical Engineering, 1974, 100(3): 207-224.
- [14] 李树勤. 在平面应变条件下砂土本构关系的试验研究 [D]. 北京: 清华大学, 1982: 1-62.
- [15] 马险峰, 望月秋利, 温玉君. 基于改良型平面应变仪的砂土特性研究 [J]. 岩石力学与工程学报, 2006, 25(9): 1745-1754.
- MA Xianfeng, MOCHIZUKI A, WEN Yujun, et al. Study on properties of sand based on improved plane strain test apparatus [J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2006, 25(9): 1745-1754.
- [16] 李广信, 张丙印, 于玉贞. 土力学 [M]. 2 版. 北京: 清华大学出版社, 2013: 175.
- [17] 栾茂田, 许成顺, 刘占阁, 等. 一般应力条件下土的抗剪强度参数探讨 [J]. 大连理工大学学报, 2004, 44(2): 271-276.
- LUAN Maotian, XU Chengshun, LIU Zhange, et al. Study of shear strength parameters of soils under general stress conditions [J]. Journal of Dalian University of Technology, 2004, 44(2): 271-276.
- [18] 龚文俊, 曾立峰, 孙军杰, 等. 基于中主应力修正关系的边坡稳定性分析 [J]. 岩土力学, 2014, 35(11): 3111-3116, 3156.
- GONG Wenjun, ZENG Lifeng, SUN Junjie, et al. Analysis of slope stability based on modified relationship of intermediate principal stress [J]. Rock and Soil Mechanics, 2014, 35(11): 3111-3116, 3156.
- [19] YU Maohong. Unified Strength Theory and Its Applications [M]. Berlin, Germany: Springer, 2004: 129-173.
- [20] 俞茂宏. 岩土类材料的统一强度理论及其应用 [J]. 岩土工程学报, 1994, 16(2): 1-9.
- YU Maohong. Unified strength theory for geomaterials and its applications [J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 1994, 16(2): 1-9.
- [21] YU Maohong, MA Guowei, QIANG Hongfu, et al. Generalized plasticity [EB/OL]. [2019-11-01]. [https://www.researchgate.net/publication/287233675\\_Generalized\\_Plasticity](https://www.researchgate.net/publication/287233675_Generalized_Plasticity).
- [22] WADE N H. Plane strain failure characteristics of a saturated clay [EB/OL]. [2019-11-01]. [https://www.researchgate.net/publication/36302501\\_Plane\\_strain\\_failure\\_characteristics\\_of\\_a\\_saturated\\_clay](https://www.researchgate.net/publication/36302501_Plane_strain_failure_characteristics_of_a_saturated_clay).
- [23] LEE K L. Comparison of plane strain and tri-axial tests on sand [J]. Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division, 1970, 96(3): 901-923.
- [24] GREEN G E. Strength and deformation of sand measured in an independent stress control cell [C]//Roscoe Memorial Symposium on Stress-Strain Behaviour of Soils. Cambridge, UK: Cambridge Co., 1972: 285-323.
- [25] 市原松平, 松沢宏, 山田公夫. 平面ひずみ状態と軸対称ひずみ状態におけるゆるい飽和砂の非排水せん断特性 [J]. Soils and Foundations, 1973, 172: 47-59.
- [26] 李兴国. 平面应变状态下三峡围堰填料的抗剪强度 [J]. 人民长江, 1985, 16(5): 34-37.
- LI Xingguo. Shear strength of filler for Three Gorges cofferdam under plane strain state [J]. Yangtze River, 1985, 16(5): 34-37.
- [27] 殷宗泽, 赵航. 中主应力对土体本构关系的影响 [J]. 河海大学学报, 1990, 18(5): 54-61.
- YIN Zongze, ZHAO Hang. Effect of middle principal stress on constitutive relationship [J]. Journal of Ho-

- hai University, 1990, 18(5): 54-61.
- [28] 柏树田, 周晓光. 堆石在平面应变条件下的强度和应力-应变关系 [J]. 岩土工程学报, 1991, 13(4): 33-40.
- BAI Shutian, ZHOU Xiaoguang. Strength and stress-strain relationship of rockfill under plane strain condition [J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 1991, 13(4): 33-40.
- [29] MOCHIZUKI A, CAI M, TAKAHASHI S. A method for plane strain testing of sand [J]. Doboku Gakkai Ronbunshu, 1993, 1993(475): 99-107.
- [30] 程展林, 丁红顺, 曾玲. 平面应变试验与简化数值分析 [J]. 长江科学院院报, 1995, 12(3): 37-42.
- CHENG Zhanlin, DING Hongshun, ZENG Ling. Plane strain test and simplified numerical analysis [J]. Journal of Yangtze River Scientific Research Institute, 1995, 12(3): 37-42.
- [31] YUMLU M, OZBAY M U. A study of the behaviour of brittle rocks under plane strain and tri-axial loading conditions [J]. International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences & Geomechanics Abstracts, 1995, 32(7): 725-733.
- [32] 郭熙灵, 胡辉, 包承纲. 堆石料颗粒破碎对剪胀性及抗剪强度的影响 [J]. 岩土工程学报, 1997, 19(3): 83-88.
- GUO Xiling, HU Hui, BAO Chenggang. Experimental studies of the effects of grain breakage on the dilatancy and shear strength of rock fill [J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 1997, 19(3): 83-88.
- [33] KURUKULASURIYA L C, ODA M, KAZAMA H. Anisotropy of undrained shear strength of an over-consolidated soil by tri-axial and plane strain tests [J]. Soils and Foundations, 1999, 39(1): 21-29.
- [34] HANNA A. Determination of plane-strain shear strength of sand from the results of tri-axial tests [J]. Canadian Geotechnical Journal, 2001, 38(6): 1231-1240.
- [35] WANATOWSKI D, CHU J. Drained behaviour of Changi sand in tri-axial and plane-strain compression [J]. Geomechanics and Geoengineering, 2007, 2(1): 29-39.
- [36] 施维成, 朱俊高, 张博, 等. 粗粒土在平面应变条件下的强度特性研究 [J]. 岩土工程学报, 2011, 33(12): 1974-1979.
- SHI Weicheng, ZHU Jungao, ZHANG Bo, et al. Strength characteristics of coarse-grained soil under plane strain condition [J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2011, 33(12): 1974-1979.
- [37] 石修松, 程展林. 堆石料平面应变条件下统一强度理论参数研究 [J]. 岩石力学与工程学报, 2011, 30(11): 2244-2253.
- SHI Xiusong, CHENG Zhanlin. Unified strength theory parameters of rockfill material in plane strain state [J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2011, 30(11): 2244-2253.
- [38] 程展林, 陈鸥, 左永振, 等. 再论粗粒土剪胀性模型 [J]. 长江科学院院报, 2011, 28(6): 39-44, 49.
- CHENG Zhanlin, CHEN Ou, ZUO Yongzhen, et al. Further discussion on dilatancy model for coarse-grained soils [J]. Journal of Yangtze River Scientific Research Institute, 2011, 28(6): 39-44, 49.
- [39] GONG Guobin, ZHA Xiaoxiong, WEI Jun. Comparison of granular material behaviour under drained tri-axial and plane strain conditions using 3D DEM simulations [J]. Acta Mechanica Solida Sinica, 2012, 25(2): 186-196.
- [40] 罗爱忠, 邵生俊. 新型卧式土工平面应变仪研制 [J]. 岩土力学, 2015, 36(7): 2117-2124.
- LUO Aizhong, SHAO Shengjun. Development of a new horizontal plane strain apparatus [J]. Rock and Soil Mechanics, 2015, 36(7): 2117-2124.
- [41] 王沙沙. 日本丰浦砂真三轴试验的研究 [D]. 杭州: 浙江工业大学, 2016: 1-65.

(编辑 杜秀杰)