

DOI: 10.7652/xjtuxb201909013

威布尔分布下小样本 $P-S-N$ 曲线拟合方法

白恩军¹, 黄树涛¹, 谢里阳²

(1. 沈阳理工大学汽车与交通学院, 110159, 沈阳;

2. 东北大学航空动力装备振动及控制教育部重点实验室, 110819, 沈阳)

摘要: 为拟合疲劳寿命服从威布尔分布的小样本 $P-S-N$ (失效概率-应力-循环次数) 曲线, 提出了小样本疲劳寿命试验数据统计分析与 $P-S-N$ 曲线拟合方法。根据疲劳寿命均值和标准差与应力水平的线性关系, 基于已知的最高级应力水平的疲劳寿命分布参数, 使用疲劳寿命算术平均值替代其他级应力水平均值 (期望), 获得疲劳寿命均值与应力水平的线性关系。根据此关系, 将不同级应力水平的疲劳寿命等效到最高级应力水平, 检验等效寿命与最高级应力水平疲劳寿命的均值相对误差, 反推各级应力水平疲劳寿命的统计参数, 从而实现了 $P-S-N$ 曲线的拟合。算例结果表明: 使用全部疲劳寿命数据时, 所提方法拟合结果与传统方法拟合结果相对误差小于 1%; 对于拟合设计的 2 组方案 (8-5-5 和 8-3-3), 所提方法与传统方法拟合结果相对误差小于 10%; 所提方法能够得到较为合理的参数, 获得较好的 $P-S-N$ 曲线拟合结果。

关键词: $P-S-N$ 曲线; 小样本; 统计分析; 疲劳寿命等效; 威布尔分布

中图分类号: TB114 **文献标志码:** A **文章编号:** 0253-987X(2019)09-0096-06

$P-S-N$ Curves Fitting of Small Sample with Fatigue Lives Obeying Weibull Distribution

BAI Enjun¹, HUANG Shutao¹, XIE Liyang²

(1. School of Automobile and Transportation, Shenyang Ligong University, Shenyang 110159, China;

2. Laboratory of Vibration and Control of Aero-Propulsion System, Northeastern University, Shenyang 110819, China)

Abstract: To fit the $P-S-N$ curves of small sample, whose fatigue lives obeying Weibull distribution, a statistical analysis method of fatigue lives of small sample and a fitting scheme of $P-S-N$ curves are proposed. According to the linear relationship between the mean or standard deviation of fatigue lives and the stress level under the logarithmic coordinates, the distribution parameters of the highest stress level are considered, the arithmetic means of fatigue lives are chosen instead of the means at other stress levels to obtain the linear relationship between the means of fatigue lives and the stress levels under the logarithmic coordinates. Following this relationship, the fatigue lives at different stress levels can be equivalently transformed to the highest stress level, and the relative errors between the means of fatigue lives and the equivalent fatigue lives are checked at the highest stress level. Then the distribution parameters of each stress level are achieved to fit the $P-S-N$ curves. When all fatigue lives in a reference are used, the relative error of fitting results between the proposed method and the traditional method is less

收稿日期: 2019-04-15。 作者简介: 白恩军(1986—), 男, 师资博士后。 基金项目: 国家自然科学基金-辽宁联合基金资助项目; 辽宁省重大装备制造协同创新中心资助项目。

网络出版时间: 2019-06-10

网络出版地址: <http://kns.cnki.net/kcms/detail/61.1069.T.20190606.1721.016.html>

than 1%. By virtue of two groups of fitting schemes of small samples (8-5-5 and 8-3-3), the relative errors between the proposed method and the traditional method are less than 10%. The proposed method is also able to obtain more reasonable parameters and fit more accurate $P-S-N$ curves.

Keywords: $P-S-N$ curve; small sample; statistical analysis; equivalent fatigue life; Weibull distribution

$P-S-N$ (失效概率-应力-循环次数) 曲线是工程上评估结构件和零部件疲劳可靠性的有力工具, 学者提出了包括大样本和小样本疲劳寿命数据的多种 $P-S-N$ 曲线拟合方法^[1-5]。通过拟合大样本疲劳寿命数据可以直接获得统计参数。在一些小样本的统计分析中, 经常借助贝叶斯方法获得疲劳寿命分布的统计参数, 或者改进大样本数据的统计方法, 使其适合小样本数据的统计分析^[6-9]。

惠民等提出了疲劳寿命服从对数正态分布的小样本数据统计分析异方差回归的分析方法^[10]。刘潇然等提出了基于非嵌入多项式混沌展开及贝叶斯更新方法的小样本中等寿命区 $P-S-N$ 曲线预测方法^[11]。赵永翔等提出了拓展极大似然法的 3 参数 $P-S-N$ 曲线预测方法^[12]。盛兴旺等提出了基于小样本数据的构件疲劳破坏全寿命区的双对数双折线 $S-N$ 曲线拟合方法^[13]。谢里阳等提出了基于样本聚集原理的疲劳寿命服从对数正态分布的小样本 $P-S-N$ 曲线拟合方法^[14]。一些学者应用神经网络和重构造等寿命疲劳曲线方法预测了复合材料的疲劳寿命及拟合材料的 $P-S-N$ 曲线^[15-17]。GB/T 24176—2009 标准中详细地阐述了金属材料疲劳寿命服从对数正态分布的 $P-S-N$ 曲线拟合方法^[18], 但是对于疲劳寿命服从威布尔分布的小样本 $P-S-N$ 曲线, 没有给出具体的统计分析和拟合方法。

因此, 基于疲劳失效迹线的概念, 疲劳寿命服从两参数威布尔分布的 $P-S-N$ 曲线拟合方法相继提出^[19-21]。本文基于疲劳失效迹线概念, 根据半对数坐标下各级应力水平的疲劳寿命的均值(期望)和标准差与各级应力水平呈线性关系的假设, 通过逐步改变线性关系系数, 再根据每个线性方程将不同应力水平的疲劳寿命等效转换到最高应力水平, 通过检验等效到最高应力水平的疲劳寿命的均值与已知的最高应力水平的均值的相对误差, 确定假设的线性关系系数, 反推疲劳寿命服从两参数威布尔分布的统计参数, 实现了疲劳寿命服从两参数威布尔分布的小样本 $P-S-N$ 曲线的拟合, 并通过算例分析, 证明了本文方法的可行性。

1 $P-S-N$ 曲线拟合原理

1.1 疲劳寿命等效转换

同一试件在不同应力水平下测试, 得到的疲劳寿命数据在各级应力水平下具有相同的概率分位点^[19-20]。基于此原理, 本文提出服从两参数威布尔分布的小样本 $P-S-N$ 曲线拟合方法。

对于威布尔分布, 不同应力水平下具有的相同疲劳寿命概率分位点可表达为

$$P(n_{i,j}) = P(n_{k,j}) \quad (1)$$

式中: $n_{i,j}$ 代表试件 j 在第 i 级应力水平的疲劳寿命; $n_{k,j}$ 代表试件 j 在第 k 级应力水平的疲劳寿命; P 代表失效概率。

因此, 对于疲劳寿命服从两参数威布尔分布, 将不同应力水平的疲劳寿命等效到最高应力水平, 得到各参数的关系为

$$\left. \begin{aligned} P(n_{1,j}^{\text{eq}}) &= P(n_{i,j}) \\ 1 - \exp\left(-\frac{n_{1,j}^{\text{eq}}}{\lambda_1}\right)^{\eta_1} &= 1 - \exp\left(-\frac{n_{i,j}}{\lambda_i}\right)^{\eta_i} \\ \ln\left(\frac{n_{1,j}^{\text{eq}}}{\lambda_1}\right)^{\eta_1} &= \ln\left(\frac{n_{i,j}}{\lambda_i}\right)^{\eta_i} \\ n_{1,j}^{\text{eq}} &= \lambda_1 \exp\left(\frac{\eta_i \ln \frac{n_{i,j}}{\lambda_i}}{\eta_1}\right) \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

式中: $n_{1,j}^{\text{eq}}$ 为第 j 级应力水平的疲劳寿命转换到第 1 级应力水平(最高应力水平)上的等效寿命; λ_1 和 λ_i 与 η_1 和 η_i 分别为第 1 级应力水平和第 i 级应力水平的疲劳寿命分布的尺度参数和形状参数, 公式为

$$\left. \begin{aligned} E_i &= \lambda_i \Gamma\left(1 + \frac{1}{\eta_i}\right) \\ D_i &= \lambda_i^2 \left\{ \Gamma\left(1 + \frac{2}{\eta_i}\right) - \left[\Gamma\left(1 + \frac{1}{\eta_i}\right) \right]^2 \right\} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

其中, $\Gamma(x)$ 代表伽马函数, E_i 和 D_i 分别代表第 i 级应力水平的疲劳寿命的均值(期望)和方差。

由于式(3)中包含 3 个伽马函数, 在解 λ_i 和 η_i 时, 无法写出显式表达式, 因而采用逐步搜索法, 具体步骤如下。

(1) 将式(3)中的 2 个公式联合, 写成关于形状参数 η_i 的等式, 得到

$$\Gamma\left(1 + \frac{2}{\eta_i}\right) / \left[\Gamma\left(1 + \frac{1}{\eta_i}\right)\right]^2 = 1 + \frac{D_i}{(E_i)^2} \quad (4)$$

令式(4)左侧为形状参数 η_i 的函数 $f(\eta_i)$, 右侧为常数项 C_i , 得到

$$\left. \begin{aligned} f(\eta_i) &= \Gamma\left(1 + \frac{2}{\eta_i}\right) / \left[\Gamma\left(1 + \frac{1}{\eta_i}\right)\right]^2 \\ C_i &= 1 + \frac{D_i}{(E_i)^2} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

(2) 令初值 $\eta_0 = 0$, 步长 $\Delta\eta = 0.001$, $\eta_{k+1} = \eta_k + \Delta\eta$ ($k=0, 1, 2, \dots$)。通过逐步搜索方法, 计算 $f(\eta_i)$ 与 C_i 的相对误差 Δ , 当 Δ 小于给定值 (如 0.001) 时, 则认为此 η_i 即为所求的解, 公式为

$$\Delta = \frac{f(\eta_i) - C_i}{C_i} < 0.001 \quad (6)$$

1.2 疲劳寿命均值、标准差与应力水平的线性关系

根据式(3)解出疲劳寿命的均值 (期望) E_i 和方差 D_i , 即可估算出各级应力水平疲劳寿命的统计参数, 拟合 P - S - N 曲线。

大量试验研究结果显示, 金属材料试样对数疲劳寿命的均值和标准差与应力水平呈线性关系^[19-21]。图1为某铝合金试样疲劳寿命的均值和标准差线性拟合结果, 置信度为 95%。

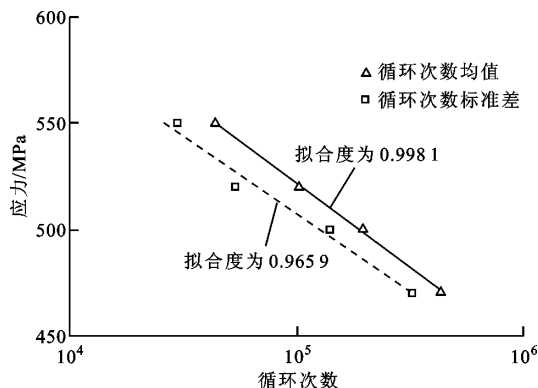


图1 某铝合金板材试样疲劳寿命的均值和标准差

从图1可知, 疲劳寿命的均值和标准差与应力水平呈线性关系。因此, 半对数坐标下各级应力水平疲劳寿命的标准差 σ_i 与应力水平 s_i 的关系式为

$$\sigma_i = \sigma_1 + k(s_1 - s_i) \quad (7)$$

式中: σ_i 代表第 i 级应力水平的疲劳寿命对数标准差; k 代表对数标准差与应力水平关系直线的斜率。

从式(7)可知, 只要找到一个合理的 k , 即可根据第1级应力水平疲劳寿命的标准差求解其他3级应力水平疲劳寿命的标准差。

2 P-S-N 曲线拟合方法

通过式(7)将各级应力水平疲劳寿命等效到第

1级应力水平, 将等效后的疲劳寿命数据与第1级应力水平的疲劳寿命数据混合, 计算混合后的疲劳寿命数据的均值与第1级应力水平的疲劳寿命均值的相对误差, 确定合理的 k 和各级应力水平的疲劳寿命标准差, 进而拟合 P - S - N 曲线, 具体方法如下。

以4级应力水平为例。在做疲劳试验时, 由于金属材料在高应力水平下疲劳寿命的分散性较小, 并且疲劳试验过程时间较短, 因此选择在最高应力水平上做15个试件, 其他每级应力水平做3个试件, 共需24个疲劳试件。

以疲劳试验方案15-3-3-3共24个疲劳试件为例, 确定合理的 k 值和各级应力水平疲劳寿命标准差, 并拟合疲劳寿命 P - S - N 曲线的方法如下。

(1) 选择4级应力水平做疲劳试验, 疲劳寿命的范围覆盖 $10^4 \sim 10^6$ 次。在最高的应力水平 s_1 做15个疲劳试件, 并记录各试件的寿命为 $n_{1,j}$ ($j=1 \sim 15$), 其他3级应力水平各做3个疲劳试件, 并记录各试件的疲劳寿命为 $n_{i,j}$ ($i=2 \sim 4, j=1 \sim 3$)。

(2) 用加权最小二乘法^[20]计算 s_1 应力水平疲劳寿命的统计参数, 得到 λ_1 和 η_1 的估计值 $\hat{\lambda}_1$ 和 $\hat{\eta}_1$, 根据式(3)计算 s_1 应力水平疲劳寿命的均值 (期望) 和标准差。其他3级应力水平的疲劳寿命数据较少, 疲劳寿命分布的参数无法确定。大数定理规定, 在随机重复试验中, 当重复次数接近无穷大时, 算术平均值收敛于期望。所以, 使用疲劳寿命算术平均值来估算其他3级应力水平的疲劳寿命数据, 公式为

$$\hat{E}_i \approx \frac{1}{\omega_i} \sum_{j=1}^{\omega_i} n_{i,j}, \quad i = 2, 3, 4 \quad (8)$$

式中: ω_i 为第 i 级应力水平的试件数; $\hat{E}_i$ 为第 i 级应力水平的估计期望。

(3) 由最小二乘法拟合4级应力水平对数疲劳寿命的均值 (期望) 的线性方程, 并由此回归方程求解4级应力水平的疲劳寿命期望 E_1 、 E_2 、 E_3 、 E_4 。

(4) 由式(7)估算其他3级应力水平的疲劳寿命的标准差, 并令初值 $k_0 = 0$, $k_{u+1} = k_u + \Delta k$ (Δk 为增量, 如 10^{-5} MPa^{-1})。由每一个假设的 k 确定的其他3级应力水平疲劳寿命的标准差, 计算疲劳寿命的方差 $D_i = 10^{2\sigma_i}$ 。由式(3)~(6)估算每级应力水平疲劳寿命的尺度参数 λ_i 和形状参数 η_i 。

(5) 根据每个假设的 k 确定的疲劳寿命尺度参数 λ_i 和形状参数 η_i , 由式(2)估算其他3级应力水平疲劳寿命等效到最高级应力水平的等效寿命。将最高级应力水平的疲劳寿命数据与等效到最高级应力水平的疲劳寿命混合, 用加权最小二乘法计算混

合后疲劳寿命数据等效的尺度参数 λ_1^{eq} 和形状参数 η_1^{eq} 。由式(3)估算等效后疲劳寿命的均值和标准差,检验等效后的疲劳寿命的均值 E_1^{eq} 与回归所得的疲劳寿命均值 E_1 的相对误差 Δ ,计算公式为

$$\Delta = \left| \frac{\lg E_1^{\text{eq}} - \lg E_1}{\lg E_1} \right| \tag{9}$$

若同时满足设定的相对误差条件(如 $\Delta < 0.001$)和 $\eta_1 > \eta_2 > \eta_3 > \eta_4$,则说明 k 值和各级应力水平疲劳寿命分布参数值即为所求的合理的值。

由各级应力水平疲劳寿命的尺度参数 λ_i 和形状参数 η_i 可计算各级应力水平下不同失效概率的

表 1 各应力水平下齿轮疲劳寿命数据^[21]

应力水平/MPa				疲劳寿命/ 10^5 次				
791.344	2.414	1.554	4.375	4.046	2.820	3.753	2.480	3.719
712.210	8.666	9.724	8.129	2.645	2.417	2.020	1.461	8.666
652.884	77.100	122.000	108.000	62.100	105.000	333.000	131.000	43.700

为验证本文方法,利用表 1 中最高级应力水平的所有疲劳寿命数据,采用加权最小二乘法拟合出最高级应力水平的疲劳寿命分布参数,其他 2 级应力水平的计算则采用疲劳寿命数据的算术平均值,通过本文方法估算疲劳寿命分布参数。在 $\Delta < 0.001$ 和 $k=0.025 \text{ MPa}^{-1}$ 时,本文方法拟合的各级应力水平疲劳寿命统计参数如表 2 所示,拟合的可靠度为 50%和 90%的 $S-N$ 曲线如图 2 所示。

表 2 各级应力水平下的疲劳寿命的统计参数

应力水平/MPa	$\lambda/10^5$	η
791.344	3.276	2.785
712.210	21.40	2.436
652.884	87.26	2.203

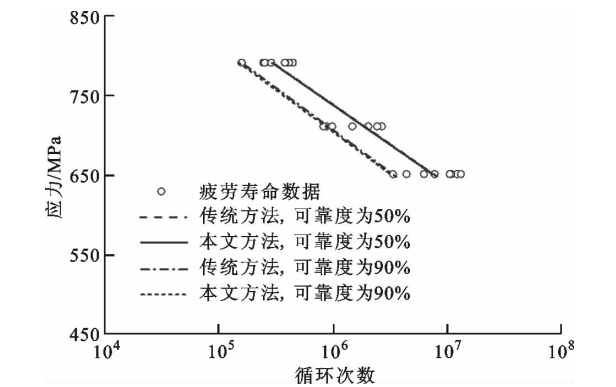


图 2 本文方法与传统方法拟合的 $S-N$ 曲线的对比

分析图 2 可知,本文方法拟合的可靠度为 50%和 90%的 $S-N$ 曲线与传统方法的拟合结果在斜率

疲劳寿命分位点,进而拟合 $P-S-N$ 曲线。

3 算例分析与讨论

3.1 拟合方法验证

传统方法使用各级应力水平所有疲劳寿命数据拟合疲劳寿命分布,进而获得各级应力水平的相同概率寿命分位点来拟合 $P-S-N$ 曲线。为验证本文提出的疲劳寿命服从两参数威布尔分布的小样本 $P-S-N$ 曲线拟合方法,以文献[21]中的齿轮疲劳寿命数据为例,与传统方法对比分析。齿轮疲劳寿命数据如表 1 所示。

上的相对误差分别为 0.12%和 0.41%,截距上的相对误差分别为 0.01%和 0.37%,相对误差均小于 1%,说明本文方法拟合 $P-S-N$ 曲线的效果较好。

3.2 不同拟合方案的对比分析

基于表 1 中的疲劳寿命数据,设计 2 个 $P-S-N$ 曲线拟合方案如下。

方案 1:假设使用最高级应力水平全部 8 个疲劳寿命数据,其他 2 级应力水平各使用 3 个疲劳寿命数据(表 1 中对应行前 3 个疲劳寿命数据),构成 8-3-3 疲劳寿命数据的 $P-S-N$ 曲线拟合方案。在 $\Delta < 0.001$ 和 $k=0.025 \text{ MPa}^{-1}$ 时,应用本文提出的方法拟合此方案,得到各级应力水平下的疲劳寿命统计参数,结果如表 3 所示。

表 3 采用方案 1 时各级应力水平下的疲劳寿命统计参数

应力水平/MPa	$\lambda/10^5$	η
791.344	2.702	2.236
712.210	18.79	2.235
652.884	80.42	2.234

方案 2:使用最高级应力水平全部 8 个疲劳寿命数据,其他 2 级应力水平各使用 5 个疲劳寿命数据(表 1 中对应行前 5 个疲劳寿命数据),构成 8-5-5 疲劳寿命数据的拟合方案。在 $\Delta < 0.001$ 和 $k=0.025 \text{ MPa}^{-1}$ 时,应用本文提出的方法拟合此方案,统计参数如表 4 所示。

使用本文方法拟合以上 2 个方案的可靠度为 90%

表 4 采用方案 2 时各级应力水平下的疲劳寿命统计参数

应力水平/MPa	$\lambda/10^5$	η
791.344	3.191	2.701
712.210	21.950	2.694
652.884	93.170	2.688

的 $S-N$ 曲线,并与传统方法拟合的可靠度为 90% 的 $S-N$ 曲线进行对比,结果如图 3 所示。分析可知:本文方法拟合方案 8-3-3 与传统方法拟合的可靠度为 90% 的 $S-N$ 曲线在斜率上相对误差为 9.91%,截距上相对误差为 5.4%;本文方法拟合方案 8-5-5 与传统方法拟合的可靠度为 90% 的 $S-N$ 曲线在斜率上相对误差为 9.31%,截距上相对误差为 4.13%;本文方法拟合的 $S-N$ 曲线在半对数坐标下,斜率和截距与传统方法的相对误差均在 10% 以内。

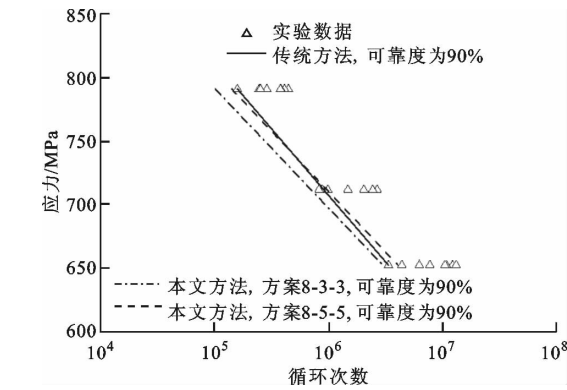


图 3 2 种方法拟合的可靠度为 90% 的 $S-N$ 曲线

图 4 为本文方法拟合 2 种方案时,得到的疲劳寿命均值回归曲线,可以看出,本文 2 个拟合方案的疲劳寿命的均值与传统方法回归的疲劳寿命的均值存在一定的相对误差。由于 2 种拟合方案使用的疲劳寿命数据量不同,因而获得的疲劳寿命的均值存在差异。

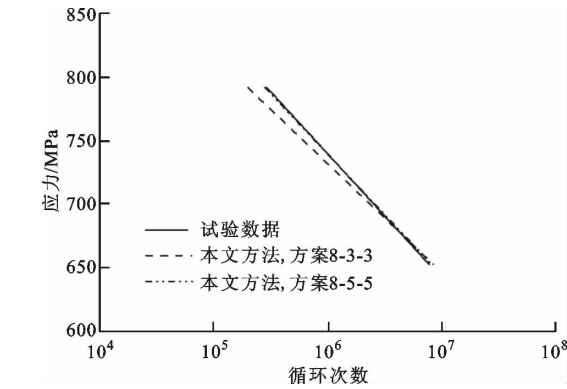


图 4 本文方法拟合 2 种方案的疲劳寿命均值回归曲线

由以上分析可见,当小样本试验疲劳寿命数据越接近母体寿命时,拟合 $P-S-N$ 曲线的效果越好。本文方法相对传统拟合方法的优点是当试验数据很少,很难通过传统方法获得每级应力水平的疲劳寿命统计参数,或者获取较多试验数据的试验成本很高时,本文方法基于小样本数据就能够获得较为理想的拟合参数,拟合出疲劳寿命服从两参数威布尔分布的 $P-S-N$ 曲线。

应用本文方法时,需要注意以下 3 点:①所有使用的数据需为有效数据;②如果试验数据分散性较大,在条件允许的情况下,在疲劳寿命数据分散性大的应力水平补做几个试件,是较有效的一种减小拟合相对误差的方式;③如果只有这些数据,无法再补充疲劳寿命数据,对于那些传统大样本方法无法解决的统计分析问题,本文方法也可以得到具有参考价值的结果,统计结果也是有一定意义的。

4 结 论

本文根据疲劳失效迹线概念,提出了疲劳寿命服从 2 参数威布尔分布的小样本 $P-S-N$ 曲线拟合方法,基于文献[21]的疲劳寿命数据,应用本文提出的方法拟合 $P-S-N$ 曲线,并与传统方法对比分析,结果显示:拟合方案 8-3-3 与 8-5-5 均可以拟合出较准确的 $P-S-N$ 曲线;方案 8-3-3 和 8-5-5 与传统方法拟合的可靠度为 90% 的 $S-N$ 曲线的斜率/截距的相对误差分别为 9.91%/5.4% 和 9.31%/4.13%;本文方法可行。

本文将不同应力水平的疲劳寿命数据共享,极大地减小了试验成本,并能够拟合出较准确的结果。

参考文献:

[1] SHIMIZU S, TOSHA K, TSUCHIYA K. New data analysis of probabilistic stress-life ($P-S-N$) curve and its application for structural materials [J]. International Journal of Fatigue, 2010, 32(3): 565-575.

[2] BAPTISTA C, REIS A, NUSSBAUMER A. Probabilistic $S-N$ curves for constant and variable amplitude [J]. International Journal of Fatigue, 2017, 101: 312-327.

[3] LEONETTI D, MALJAARS J, SNIJDER H H. Fitting fatigue test data with a novel $S-N$ curve using frequentist and Bayesian inference [J]. International Journal of Fatigue, 2017, 105: 128-143.

[4] 胡杰鑫, 谢里阳, 尹伟, 等. 复杂结构件疲劳可靠性模型与评估技术研究 [J]. 西安交通大学学报, 2018,

- 52(7): 123-129.
- HU Jiexin, XIE Liyang, YIN Wei, et al. Study on fatigue reliability model and evaluation method of complex structures [J]. Journal of Xi'an Jiaotong University, 2018, 52(7): 123-129.
- [5] 付曦, 张俊红, 寇海军, 等. 复杂载荷下轴流压气机叶片疲劳损伤数值研究 [J]. 西安交通大学学报, 2017, 51(5): 149-155.
- FU Xi, ZHANG Junhong, KOU Haijun, et al. Numerical study on the fatigue damage of compressor blade under complex loads [J]. Journal of Xi'an Jiaotong University, 2017, 51(5): 149-155.
- [6] 刘建中, 谢里阳, 徐灏. 疲劳寿命概率分布的模糊贝叶斯确定方法 [J]. 航空学报, 1994, 15(5): 607-610.
- LIU Jianzhong, XIE Liyang, XU Hao. Determining fatigue life reliability model with fuzzy judgment and Bayes theory [J]. Acta Aeronautica et Astronautica Sinica, 1994, 15(5): 607-610.
- [7] 周源泉, 翁朝曦, 刘正贤. 对数正态分布均值的 Bayes 及 Fiducial 精确限 [J]. 系统工程与电子技术, 1994, 16(4): 67-73.
- ZHOU Yuanquan, WENG Zhaoxi, LIU Zhengxian. Exact Bayesian and fiducial limits for the mean of log-normal distribution [J]. Systems Engineering and Electronics, 1994, 16(4): 67-73.
- [8] 杨华波, 张士峰, 蔡洪. Weibull 分布可靠性分析 [J]. 飞行器测控学报, 2003, 22(4): 37-42.
- YANG Huabo, ZHANG Shifeng, CAI Hong. Reliability analysis of Weibull distribution [J]. Journal of Spacecraft TT&C Technology, 2003, 22(4): 37-42.
- [9] GUIDA M, PENTA F. A Bayesian analysis of fatigue data [J]. Structural Safety, 2010, 32(1): 64-76.
- [10] 傅惠民, 刘成瑞. S - N 曲线和 P - S - N 曲线小子样测试方法 [J]. 机械强度, 2006, 28(4): 552-555.
- FU Huimin, LIU Chengrui. Small sample test method for S - N and P - S - N curves [J]. Journal of Mechanical Strength, 2006, 28(4): 552-555.
- [11] 刘潇然, 孙秦, 梁珂. 工程 p - S - N 曲线的小子样预测方法研究 [J]. 西北工业大学学报, 2018, 36(5): 831-838.
- LIU Xiaoran, SUN Qin, LIANG Ke. A small sample prediction method for engineering p - S - N curve [J]. Journal of Northwestern Polytechnical University, 2018, 36(5): 831-838.
- [12] 赵永翔, 王金诺, 高庆. 估计三种常用疲劳应力-寿命模型 P - S - N 曲线的统一经典极大似然法 [J]. 应用力学学报, 2001, 18(1): 83-90, 160-161.
- ZHAO Yongxiang, WANG Jinnuo, GAO Qing. A unified classical maximum likelihood approach for estimating P - S - N curves of three commonly used fatigue stress-life relations [J]. Chinese Journal of Applied Mechanics, 2001, 18(1): 83-90, 160-161.
- [13] 盛兴旺, 郑纬奇, 雷信洲. 基于小样本数据的构件疲劳破坏全寿命区 S - N 曲线 [J]. 中国铁道科学, 2017, 38(5): 22-29.
- SHENG Xingwang, ZHENG Weiqi, LEI Jizhou. S - N curve of fatigue failure life cycle of component based on small sample data [J]. China Railway Science, 2017, 38(5): 22-29.
- [14] 谢里阳, 刘建中. 样本信息聚集原理与 P - S - N 曲线拟合方法 [J]. 机械工程学报, 2013, 49(15): 96-104.
- XIE Liyang, LIU Jianzhong. Principle of sample polymerization and method of P - S - N curve fitting [J]. Journal of Mechanical Engineering, 2013, 49(15): 96-104.
- [15] AL-ASSAF Y, KADI H E. Fatigue life prediction of composite materials using polynomial classifiers and recurrent neural networks [J]. Composite Structures, 2007, 77(4): 561-569.
- [16] BUCAR T, NAGODE M, FAJDIGA M. A neural network approach to describing the scatter of S - N curves [J]. International Journal of Fatigue, 2006, 28(4): 311-323.
- [17] KAWAI M, YANO K. Anisomorphic constant fatigue life diagrams of constant probability of failure and prediction of P - S - N curves for unidirectional carbon/epoxy laminates [J]. International Journal of Fatigue, 2016, 83: 323-334.
- [18] 全国钢标准化技术委员会. 金属材料 疲劳试验 数据统计方案与分析方法: GB/T 24176—2009 [S]. 北京: 中国标准出版社, 2009: 1-18.
- [19] SUNDARARAJAN C. Probabilistic structural mechanics handbook [M]. Boston, MA, USA: Springer US, 1995: 146-165.
- [20] AHMAD K E. Modified weighted least-squares estimators for the three-parameter Weibull distribution [J]. Applied Mathematics Letters, 1994, 7(5): 53-56.
- [21] 陈东升, 钟其水, 陈欣. 车辆变速箱齿轮弯曲疲劳寿命的估算 [J]. 机械设计, 2002, 19(5): 36-39.
- CHEN Dongsheng, ZHONG Qishui, CHEN Xin. The estimation on bending fatigue service life of gears in vehicle gearbox [J]. Journal of Machine Design, 2002, 19(5): 36-39.

(编辑 陶晴 武红江)