

DOI: 10.7652/xjtub201905023

粗糙球形表面的分形接触力学模型

原园¹, 张利华¹, 徐颖强²

(1. 西安理工大学机械与精密仪器工程学院, 710048, 西安; 2. 西北工业大学机电学院, 710072, 西安)

摘要: 为了获得粗糙表面点接触的力学特性, 提高接触元件的承载能力, 采用 Weierstrass-Mandelbrot 函数生成了三维粗糙球形表面, 建立了粗糙球形表面与一刚性平面接触的分形力学模型, 推导出不同接触区域上各个频率指数的微凸体的截断面积密度分布函数, 获得了真实接触面积与总接触载荷的解析表达式, 得到了接触半宽上的接触压力分布。计算结果表明: 微凸体的频率指数范围直接影响粗糙球形表面的接触力学性质; 当最小频率指数 $n_{\min}$ 与临界弹性频率指数 n_{ec} 满足 $n_{\min} + 5 \leq n_{ec}$ 时, 粗糙球形表面在整个接触过程中呈现弹性变形性质, 当最小频率指数 $n_{\min}$ 与临界弹塑性频率指数 n_{epc} 满足 $n_{\min} > n_{epc}$ 时, 粗糙球形表面在整个接触过程中呈现非弹性变形性质; 粗糙球形表面的接触半宽主要由基圆确定, 对于相同比例的下压量, 接触压力峰值与最小频率指数成正比; 在弹性变形与弹塑性变形阶段, 接触压力在接触区域中心达到最大, 向接触区域边缘方向递减, 在完全塑性变形阶段, 接触压力在整个接触区域近似均匀分布。

关键词: 粗糙球形表面; 分形; 微凸体; 接触; 频率指数

中图分类号: TH117 **文献标志码:** A **文章编号:** 0253-987X(2019)05-0176-11

Mechanical Model of Contact Between a Sphere-Based Fractal Rough Surface and a Rigid Flat Surface

YUAN Yuan¹, ZHANG Lihua¹, XU Yingqiang²

(1. College of Mechanical and Precision Instrument Engineering, Xi'an University of Technology, Xi'an 710048, China;

2. School of Mechanical Engineering, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China)

Abstract: To investigate mechanical properties of point contact between rough surfaces and improve the bearing capacity of contact component, the Weierstrass-Mandelbrot function is used to simulate a three-dimensional sphere-based fractal rough surface, and then a mechanical model of contact between a sphere-based fractal rough surface and a rigid plane is developed. The truncated size distributions for asperities with different frequency indexes in different contact zones are derived. The relation between real contact area and total contact load is obtained, and the contact pressure distribution on the contact half width is obtained. The results show that the mechanical properties of sphere-based fractal rough surface are mainly affected by the range of frequency index. When the relation between the minimum frequency index $n_{\min}$ and the elastic critical frequency index n_{ec} is $n_{\min} + 5 \leq n_{ec}$, the sphere-based fractal rough surface exhibits elastic property in a complete contact process. When the relation between the $n_{\min}$ and the elasto-plastic critical frequency index n_{epc} is $n_{\min} > n_{epc}$, the sphere-based fractal rough surface exhibits inelastic

收稿日期: 2018-10-26。 作者简介: 原园(1978—), 男, 副教授。 基金项目: 国家自然科学基金资助项目(51475364, 51105304)。

网络出版时间: 2019-02-21

网络出版地址: <http://kns.cnki.net/kcms/detail/61.1069.T.20190221.0912.011.html>

property during the entire contact process. The value of contact half width of the sphere-based fractal rough surface mainly depends on the radius of base circle. With the same ratio of interference, the peak contact pressure is proportional to the value of the minimum frequency index. In elastic and elasto-plastic deformation process, the contact pressure reaches the maximum at the center of contact zone, and decreases from center to edge of the contact zone. In plastic deformation process, the contact pressure exhibits approximately uniform distribution in whole contact zone.

Keywords: sphere-based rough surface; fractal; asperity; contact; frequency index

接触现象广泛存在于工程领域中。掌握物体之间的接触力学性能,对研究润滑、摩擦、磨损及热传导等具体的工程实际问题具有十分重要的作用。经典接触力学中普遍认为物体的接触表面是光滑连续的,当两物体接触时,其间的实际接触面积与名义接触面积是相等的。然而,实验观测表明,物体的接触表面是由众多几何尺寸不同的微凸体构成,即接触表面是粗糙表面。由于两个物体的接触实际是两接触面上微凸体的相互作用,使得实际接触面积远远小于名义接触面积,真实接触面积承受过大的接触载荷,导致接触面的压溃、磨损,引起接触零部件的失效。因此,研究粗糙表面在接触过程中真实接触面积与接触载荷的关系,对提高接触零部件的承载能力和使用寿命具有十分重要的理论指导作用。

目前,粗糙表面接触问题的研究对象以平面接触为主,研究方法主要从实验测试^[1-2]和理论研究两方面进行。实验测试可以直观地得到粗糙表面接触过程中的各项力学性能规律,验证接触零部件是否满足设计要求,但实验测试结果对仪器的测量精度和实验环境较为敏感,测量结果只在一定范围(材料属性、表面形貌、载荷历程等)内有效,不具有普遍性。理论研究所建立的力学模型和计算方法具有一定的普遍适用性,因此得到长足发展。在理论研究中,粗糙表面接触力学模型主要分为统计学模型、分形模型、多尺度模型^[3-4]、确定性模型^[5]及有限元模型^[6],这些模型各具优势。多尺度、确定性和有限元模型考虑到微凸体相互叠加的因素,更准确地反映了粗糙表面的真实面貌。统计学模型和分形模型将微凸体简化为半球体,获得了粗糙表面接触过程中真实接触面积和接触载荷的关系。由于这两种模型求解简便,易于扩展到不同的工程领域,应用较为广泛。

Greenwood 和 Williamson 于 1966 年首次建立了粗糙表面接触的统计学模型,即 GW 模型^[7]。在该模型中,所有微凸体的曲率半径被认为是相同的,其高度服从高斯分布,并且引入塑性指数作为评判

微凸体发生弹性或塑性变形的依据,进而推导出粗糙表面真实接触面积和接触载荷的关系。随后, GW 模型被不断扩展来满足不同的工况要求,例如材料的弹塑性变形^[8]、材料的黏弹性变形^[9]、弹塑性变形的卸载^[10]、微凸体的相互作用^[11]等,这些研究成果使得 GW 模型日趋完善。Mandelbrot 于 1982 年观测到物体表面形貌轮廓呈现出连续、不可微和自相似的特征,满足分形的几何特性^[12]。随后, Majumdar 等采用 Weierstrass-Mandelbrot 函数模拟出二维粗糙表面轮廓^[13], Majumdar 和 Bhushan 根据二维分形表面轮廓的特征,认为微凸体的分布形式服从海洋岛屿的分布规律,建立了二维粗糙表面接触力学模型,即 MB 模型,获得了真实接触面积与接触载荷的解析表达式^[14]。由于 MB 模型易于直接得到真实接触面积与接触载荷的解析解,很快被应用到工程中的众多具体问题,例如:三维粗糙表面接触^[15]、焊接材料界面的接触率^[16]、接触面的黏着磨损^[17]、结合部的法向刚度^[18]等。然而,在 MB 模型中,粗糙表面的微凸体在接触过程中首先发生完全塑性变形,随着接触下压量的增大,微凸体的变形逐渐转变为弹性,该现象与经典的赫兹接触模型矛盾。对此, Morag 等修正了分形模型中单个微凸体的弹塑性接触模型,使微凸体的变形过程与赫兹接触模型保持一致^[19]。Yuan 等人修正了传统的 MB 模型^[20]。在修正模型中,微凸体的变形过程符合赫兹接触理论,微凸体在接触过程中承担的接触面积和接触载荷与其曲率半径成正比。该模型也被应用到三维接触^[21]、线接触^[22]及接触卸载^[23]等具体问题。

基于上述研究成果,根据分形理论,本文建立了球形分形粗糙表面的接触力学模型。球形分形粗糙表面是一个曲面,将粗糙表面的接触区域分成 N 份,每份接触区域都可以等效成一个平面接触问题。推导每份接触区域上各个频率指数的微凸体的截断面积密度分布函数,获得真实接触面积与总接触载

荷的解析表达式,即可得到接触半宽上的接触压力分布规律。本文可为机械工程领域的点接触问题的理论研究、零部件设计提供一定的理论依据。

1 球形分形粗糙表面的表征

在球坐标系 (r, φ, ϕ) 中,各向同性的球形分形粗糙表面的方程^[24]为

$$W(r, \varphi, \phi) = r + r(G/r)^{D-2} (\ln \gamma / MS)^{1/2} \cdot \sum_{m=1}^M \sum_{s=1}^S \sum_{n=-\infty}^{\infty} \gamma^{n(D-3)} \left[\cos(\psi_{m,s,n}) - \cos\left(\frac{2\pi\gamma^n}{r} \mathbf{n}_{m,s} \cdot \mathbf{u} + \psi_{m,s,n}\right) \right] \quad (1)$$

式中: $W(r, \varphi, \phi)$ 表示粗糙表面上任意一点到圆心的距离, r 为球形分形粗糙表面的基圆半径, φ 为从 z 轴正方向看 r 在 xoy 平面上的投影与 x 轴正方向的夹角, ϕ 为 r 与 z 轴正方向的夹角; $\psi_{m,s,n}$ 为随机相位, m 和 s 分别为 φ 方向和 ϕ 方向上重叠隆起部的数量, M 和 S 分别为其最大值, n 为微凸体的频率指数; γ 为随机轮廓的空间频率,通常情况下取 $\gamma = 1.5$; D 为分形维数,对于三维表面轮廓, D 的取值范围为 $2 < D < 3$; G 为粗糙表面的特征尺度参数; $\mathbf{n}_{m,s}$ 表示粗糙球形表面径向方向的单位向量; $\mathbf{u}$ 表示粗糙球形表面的矢径。 $\mathbf{n}_{m,s} \cdot \mathbf{u}$ 的具体公式为

$$\mathbf{n}_{m,s} \cdot \mathbf{u} = r[\sin(\phi_a)\sin(\phi)\cos(\varphi - \varphi_a) + \cos(\phi_a)\cos(\phi)] \quad (2)$$

式中: $\phi_a = \pi s / S$; $\varphi_a = 2\pi m / M$ 。

若不考虑微凸体之间的相互重叠,则粗糙球形表面上对应 φ 方向与 ϕ 方向上的重叠隆起部的个数为1。令 $M=S=1$,得到 $\phi_a = \pi$, $\varphi_a = 2\pi$,带入式(2)可得 $\mathbf{n}_{m,s} \cdot \mathbf{u} = r\cos\phi$ 。基于上述简化过程,式(1)可变换为

$$W(r, \varphi, \phi) = r + r(G/r)^{D-2} (\ln \gamma)^{1/2} \cdot$$

$$\sum_{n=n_{\min}}^{n_{\max}} \gamma^{n(D-3)} [\cos\psi_n - \cos(2\pi\gamma^n \cos\phi + \psi_n)] \quad (3)$$

式中: $\psi_n \triangleq \psi_{1,1,n}$;粗糙球形表面上微凸体频率指数范围从 $n_{\min}$ 变化到 $n_{\max}$,二者之间的关系为 $n_{\max} = n_{\min} + \text{int}[\log(L/L_a)/\log\gamma]$, $\text{int}[\]$ 表示取括号内的值的整数部分, L 为粗糙表面的取样长度,对于粗糙球形表面, $L = r^{[24]}$, L_a 为截止长度。采用式(3)生成 $D = 2.3$, $G = 2 \times 10^{-5}$ m时的粗糙球形表面,并在直角坐标系 xyz 下进行表示,结果如图1所示。

2 单个微凸体的接触力学特性

粗糙表面上的微凸体的力学性能直接影响粗糙

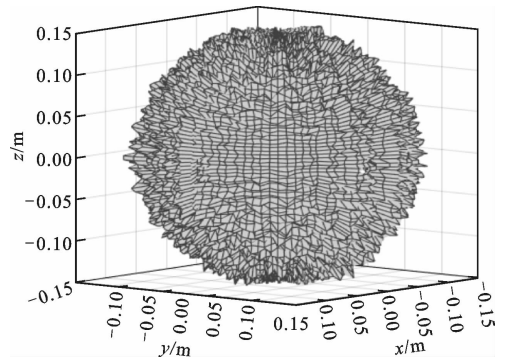


图1 三维粗糙球形表面轮廓

表面的力学性能,因此必须先确定单个微凸体在接触过程中接触载荷和接触面积的关系。假设粗糙球形表面上的微凸体之间不发生相互作用,微凸体的几何外形为半球形。在第 i 份接触区域中(接触区域的划分在第3节中详细描述),根据式(3),直角坐标下频率指数为 n 的微凸体未变形前的轮廓方程为

$$Z_{i,n}(x) = G^{D-2} (\ln \gamma)^{1/2} (L/\gamma^n)^{3-D} \cdot \left[\cos\psi_{i,n} - \cos\left(\frac{2\pi x}{L} \gamma^n - \psi_{i,n}\right) \right] \quad (4)$$

式中: $Z_{i,n}$ 表示单个微凸体轮廓曲线上任意一点的高度; $\psi_{i,n}$ 为 $(0, 2\pi)$ 范围内随机相位。

图2表示了该微凸体与一刚性平面接触的情况,虚线部分为微凸体的原始轮廓,实线部分为微凸体的变形轮廓。

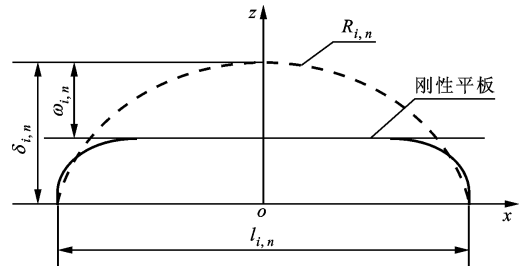


图2 单个微凸体接触模型

图2中: $l_{i,n}$ 为微凸体的基底长度,与取样长度 L 的关系为 $l_{i,n} = L/\gamma^n$ ^[24]; $\omega_{i,n}$ 为刚性平面的下压量; $\delta_{i,n}$ 为微凸体的高度,表达式为

$$\delta_{i,n} = G^{D-2} (\ln \gamma)^{1/2} (L/\gamma^n)^{3-D} \quad (5)$$

$R_{i,n}$ 为对应的顶端曲率半径,表达式为

$$R_{i,n} = \left| \frac{[1 + (dZ_{i,n}(x)/dx)^2]^{3/2}}{d^2 Z_{i,n}(x)/dx^2} \right|_{x=L\phi_{i,n}/2\pi\gamma^n} = \frac{(L/\gamma^n)^{D-1}}{4\pi^2 G^{D-2} (\ln \gamma)^{1/2}} \quad (6)$$

当 $\omega_{i,n} \leq \omega_{i,nec}$ 时,微凸体发生弹性变形。 $\omega_{i,nec}$ 为弹性临界下压量,表达式为 $\omega_{i,nec} = (\pi KH/2E)^2 \cdot R_{i,n}$,式中: K 为硬度系数,具体取值与泊松比 ν 有

关, $K=0.454+0.41\nu$; E 为弹性模量; H 为材料的硬度。对应 $\omega_{i,nec}$ 的弹性临界接触面积为 $a_{i,nec} = \pi R_{i,n} \omega_{i,nec}$ 。弹性变形阶段的接触面积 $a'_{i,ne}$ 、截断面积 $a'_{i,ne}$ 、接触载荷 $F_{i,ne}$ 之间的关系^[15,21]为

$$a_{i,ne} = \pi R_{i,n} \omega_{i,n} = a'_{i,ne} / 2 \quad (7)$$

$$F_{i,ne} = \frac{8E\pi^{1/2}G^{D-2}(\ln\gamma)^{1/2}}{3\sqrt{2}(L/\gamma^n)^{D-1}} (a'_{i,ne})^{3/2} \quad (8)$$

当 $n < n_{ec}$ 时,微凸体只能发生弹性变形。 n_{ec} 为临界弹性频率指数,表达式^[21]为

$$n_{ec} = \text{int} \left[\frac{1}{2(D-2)\lg\gamma} \cdot \lg \left(\left(\frac{KH}{2E} \right)^2 \frac{L^{2(D-2)}}{4G^{2(D-2)}\ln\gamma} \right) \right] \quad (9)$$

当 $\omega_{i,nec} < \omega_{i,n} \leq 76.8\omega_{i,nec}$ 时,微凸体发生弹塑性变形。弹塑性变形阶段的接触面积 $a_{i,nep}$ 、截断面积 $a'_{i,nep}$ 、接触载荷 $F_{i,nep}$ 之间的关系^[8]为

$$a_{i,nep} = 0.5(a'_{i,nec})^{-0.1597} (a'_{i,nep})^{1.1597} \quad (10)$$

$$F_{i,nep} = \frac{1}{3}KH(a'_{i,nec})^{-0.3801} (a'_{i,nep})^{1.3801} \quad (11)$$

式中 $a'_{i,nec}$ 为弹性临界截断面积。

从式(10)(11)可以看出, $a_{i,nec} \leq a_{i,nep} \leq a_{i,nepc}$, $a_{i,nepc}$ 为临界弹塑性接触面积, $a_{i,nepc} = 153.6a_{i,nec}$ 。当 $n < n_{epc}$ 时,微凸体能发生弹性变形和弹塑性变形, n_{epc} 为临界弹塑性频率指数,表达式^[21]为

$$n_{epc} = \text{int} \left[\frac{1}{2(D-2)\lg\gamma} \cdot \lg \left(\frac{76.8}{4} \frac{L^{2(D-2)}}{G^{2(D-2)}\ln\gamma} \left(\frac{KH}{2E} \right)^2 \right) \right] \quad (12)$$

当 $\omega_{i,n} > \omega_{i,nepc}$ 时,微凸体发生完全塑性变形。 $\omega_{i,nepc}$ 为弹塑性临界下压量。完全塑性变形阶段的接触面积 $a_{i,np}$ 、截断面积 $a'_{i,np}$ 、接触载荷 $F_{i,np}$ 之间的关系^[15,21]为

$$a_{i,np} = a'_{i,np} = 2\pi R_{i,n} \omega_{i,n} \quad (13)$$

$$F_{i,np} = Ha'_{i,np} \quad (14)$$

3 真实接触面积和总接触载荷

3.1 接触模型的建立

一个粗糙球形表面与一个粗糙平面接触可以转化为一个粗糙球形表面与一个刚性平面接触,接触过程中基圆不发生变形,如图3所示。

图3中: d 为刚性平面与基圆底部之间的距离; ω 为刚性平面的下压量; $\delta_{n_{\min}}$ 表示频率指数为 $n_{\min}$ 的微凸体高度, $\delta_{n_{\min}}$ 与 d 之间的关系为 $\omega + d = \delta_{n_{\min}}$ 。粗糙球形表面与刚性平面之间的接触区域是一个半径为 R_c 的圆。在接触区域与非接触区域的边界上,

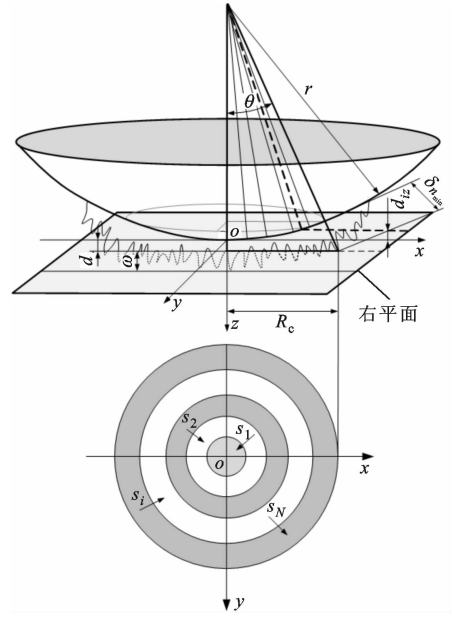


图3 粗糙球形表面与刚性平面接触示意图

假设刚性平面刚好与频率指数为 $n_{\min}$ 的一个微凸体顶端相切,则 R_c 可表示为

$$R_c = \sqrt{(r + \delta_{n_{\min}})^2 - (r + \delta_{n_{\min}} - \omega)^2} \quad (15)$$

与接触半宽 R_c 对应的圆心角为 θ 。若将圆心角 θ 平均分成 N 份,则接触区域也被分为 N 份。 s_1 表示接触区域的第一份, s_2 表示接触区域的第二份, s_i 表示接触区域的第 i 份,其中接触区域的第一份为圆形,其余各份为环形。至此,粗糙球形表面接触问题转化成 N 个平面接触问题。当刚性平面的下压量为 ω 时,每份对应的下压量也不同,第 i 份的下压量可表示为

$$\omega^i = \delta_{n_{\min}} - (\delta_{n_{\min}} - \omega + d_{iz}) / \cos\theta_i \quad (16)$$

式中: $\theta_i = \frac{2i-1}{2N}\theta$, $i \in [1, N]$; d_{iz} 是第 i 份中基圆的中点与刚性平面之间的距离,表达式为

$$d_{iz} = r - r\cos(\theta_i) = r - r\cos\left(\frac{2i-1}{2N}\theta\right) \quad (17)$$

其中 $i \in [1, N]$

3.2 微凸体的截断面积密度分布函数

整个接触区域包含频率指数从 $n_{\min}$ 到 $n_{\max}$ 的微凸体,将整个接触区域分成 N 份,每一小份接触区域中同样包含频率指数从 $n_{\min}$ 到 $n_{\max}$ 的微凸体。若用 a' 表示微凸体的接触截断面积,则整个接触区域上微凸体截断面积密度分布函数 $n'(a')$ 的表达式^[15]为

$$n'(a') = \frac{D-1}{2a_1'} \left(\frac{a_1'}{a'} \right)^{(D+1)/2} \quad (18)$$

式中 a_1' 为给定的下压量下粗糙表面上微凸体的最

大截断面积。粗糙表面真实截断面积 A'_r 为

$$A'_r = \int_0^{a'_1} n'(a') a' da' = \frac{D-1}{3-D} a'_1 \quad (19)$$

当整个接触区域被分成 N 份, 每份接触区域的微凸体截断面积密度分布函数也互不相同。定义第 i 份接触区域的微凸体截断面积密度分布函数 $n'_i(a')$ 与整个接触区域的微凸体截断面积密度分布函数 $n'(a')$ 的关系为

$$n'_i(a') = \xi_i(N) n'(a') \quad (20)$$

式中 $\xi_i(N)$ 为第 i 份的微凸体截断面积密度分布函数修正系数, 与第 1 份的修正系数 $\xi_1(N)$ 的关系为

$$\xi_i(N) = \Delta_i(N) \xi_1(N) \quad (21)$$

其中 $\Delta_i(N) = s_i(N)/s_1(N) = 2i-1$, $s_1(N)$ 表示第一份接触区域的名义面积, $s_i(N)$ 表示第 i 份接触区域的名义面积。

在给定下压量的情况下, 使用 $n'(a')$ 和 $n'_i(a')$ 得到的真实接触截断面积是相等的, 即

$$A'_r = \int_0^{a'_1} n'(a') a' da' = \sum_{i=1}^N \int_0^{a'_{i,1}} n'_i(a') a' da' \quad (22)$$

式中 $a'_{i,1}$ 表示第 i 份接触区域中微凸体的最大截断面积。联立式(21)和(22), 可得

$$\xi_1(N) = \frac{a'_1}{\sum_{i=1}^N \Delta_i(N) a'_{i,1}} \quad (23)$$

式中 $a'_1 = \max\{a'_{i,1}\}$, $1 \leq i \leq N$ 。

在第 i 份接触区域中包含频率指数从 $n_{\min}$ 到 $n_{\max}$ 的微凸体, 频率指数为 n 的微凸体截断面积密度分布函数 $n'_{i,n}(a')$ 定义为

$$n'_{i,n}(a') = \Lambda_{i,n} n'_i(a') \quad (24)$$

式中 $\Lambda_{i,n}$ 表示第 i 份接触区域中频率指数为 n 的微凸体截断面积密度分布函数的修正系数。在该份接触区域中, 面对给定的下压量, 使用 $n'_i(a')$ 和使用 $n'_{i,n}(a')$ 得到的真实接触截断面积是相等的, 即

$$\int_0^{a'_{i,1}} n'_i(a') a' da' = \sum_{n=n_{\min}}^{n_{\max}} \int_0^{a'_{i,n,1}} \Lambda_{i,n} n'_{i,n}(a') a' da' \quad (25)$$

式中 $a'_{i,n,1}$ 表示第 i 份接触区域中频率指数为 n 的微凸体的最大截断面积。

为简化计算, 令 $\Lambda_{i,\min} = \Lambda_{i,\min+1} = \dots = \Lambda_{i,\max-1} = \Lambda_{i,\max} = \Lambda_i$, 根据文献[20], 可得

$$\Lambda_i = \frac{a'_{i,1}}{\sum_{n=n_{\min}}^{n_{\max}} a'_{i,n,1}} \quad (26)$$

式中 $a'_{i,1} = \max\{a'_{i,n,1}\}$ 。综上, 第 i 份接触区域中频率指数为 n 的微凸体截断面积密度分布函数为

$$n'_{i,n}(a') = \Lambda_i \Delta_i(N) \xi_1(N) n'(a') \quad (27)$$

3.3 真实接触面积和总接触载荷

球形分形粗糙表面与刚性平面接触时, 整个接触区域上的所有微凸体可能发生弹性变形、弹塑性变形或完全塑性变形。整个接触区域的真实接触面积 A_r 可以表示为

$$A_r = A_{re} + A_{rep} + A_{rp} \quad (28)$$

式中 A_{re} 、 A_{rep} 和 A_{rp} 分别是由弹性变形、弹塑性变形和完全塑性变形引起的真实接触面积, 分别表示为

$$\begin{aligned} A_{re} &= \sum_{i=1}^N \sum_{n=n_{\min}}^{n_{\max}} \int_0^{a'_{i,n,1}} \frac{a'}{2} n'_{i,n}(a') da' + \\ &\sum_{i=1}^N \sum_{n=n_{ec}+1}^{n_{\max}} \int_0^{a'_{i,nec}} \frac{a'}{2} n'_{i,n}(a') da' = \\ &\xi_1(N) \frac{D-1}{6-2D} \sum_{i=1}^N \left[\Delta_i(N) \Lambda_i \cdot \right. \\ &\left. \left(\sum_{n=n_{\min}}^{n_{ec}} a'_{i,n,1} + \sum_{n=n_{ec}+1}^{n_{\max}} (a'_{i,n,1})^{\frac{D-1}{2}} (a'_{i,nec})^{\frac{3-D}{2}} \right) \right] \quad (29) \\ A_{rep} &= \sum_{i=1}^N \sum_{n=n_{ec}+1}^{n_{epc}} \left[\int_0^{a'_{i,n,1}} \frac{1}{2} (a'_{i,nec})^{-0.1597} (a')^{1.1597} \cdot \right. \\ &n_{i,n}(a') da' \left. \right] + \sum_{i=1}^N \sum_{n=n_{epc}+1}^{n_{\max}} \left[\int_0^{a'_{i,nepc}} \frac{1}{2} (a'_{i,nec})^{-0.1597} \cdot \right. \\ &\left. (a')^{1.1597} n_{i,n}(a') da' \right] = \\ &\xi_1(N) \frac{D-1}{6.6388-2D} \sum_{i=1}^N \left\{ \Delta_i(N) \Lambda_i \cdot \right. \\ &\left[\sum_{n=n_{ec}+1}^{n_{epc}} ((a'_{i,n,1})^{1.1597} (a'_{i,nec})^{-0.1597} - (a'_{i,n,1})^{\frac{D-1}{2}} \cdot \right. \\ &(a'_{i,nec})^{\frac{3-D}{2}}) + \sum_{n=n_{epc}+1}^{n_{\max}} ((a'_{i,n,1})^{\frac{D-1}{2}} (a'_{i,nec})^{-0.1597} \cdot \\ &\left. (a'_{i,nepc})^{-\frac{D}{2}+1.6597} - (a'_{i,n,1})^{\frac{D-1}{2}} (a'_{i,nec})^{\frac{3-D}{2}}) \right] \left. \right\} \quad (30) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_{rp} &= \sum_{i=1}^N \sum_{n=n_{epc}+1}^{n_{\max}} \int_0^{a'_{i,n,1}} n_{i,n}(a') a' da' = \\ &\xi_1(N) \frac{D-1}{3-D} \sum_{i=1}^N \left[\Delta_i(N) \Lambda_i \cdot \right. \\ &\left. \sum_{n=n_{epc}+1}^{n_{\max}} (a'_{i,n,1} - (a'_{i,n,1})^{\frac{D-1}{2}} (a'_{i,nepc})^{\frac{3-D}{2}}) \right] \quad (31) \end{aligned}$$

其中 $a'_{i,nepc}$ 表示第 i 份接触区域中频率指数为 n 的微凸体的弹塑性临界截断面积。

与真实接触面积对应的总接触载荷可表示为

$$F_r = F_{re} + F_{rep} + F_{rp} \quad (32)$$

式中 F_{re} 、 F_{rep} 和 F_{rp} 分别是由弹性变形、弹塑性变形

和完全塑性变形引起的总接触载荷,这三个部分可以表示为

$$\begin{aligned} F_{\text{re}} &= \sum_{i=1}^N \sum_{n=n_{\min}}^{n_{\text{ec}}} \int_0^{a'_{i,n,1}} F_{i,\text{ne}}(a') n_{i,n}(a') da' + \\ &\sum_{i=1}^N \sum_{n=n_{\text{ec}}+1}^{n_{\max}} \int_0^{a'_{i,\text{nec}}} F_{i,\text{ne}}(a') n_{i,n}(a') da' = \\ T_0 \xi_1(N) &\frac{(D-1)}{(4-D)L^{(D-1)}} \sum_{i=1}^N \left\{ \Delta_i(N) \Lambda_i \cdot \right. \\ &\left[\sum_{n=n_{\min}}^{n_{\text{ec}}} \gamma^{n(D-1)} (a'_{i,n,1})^{3/2} + \right. \\ &\left. \left. \sum_{n=n_{\text{ec}}+1}^{n_{\max}} \gamma^{n(D-1)} (a'_{i,n,1})^{\frac{D-1}{2}} (a'_{i,\text{nec}})^{\frac{4-D}{2}} \right] \right\} \quad (33) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_{\text{rep}} &= \sum_{i=1}^N \sum_{n=n_{\text{ec}}+1}^{n_{\text{epc}}} \int_{a'_{i,\text{nec}}}^{a'_{i,n,1}} F_{i,\text{nep}}(a') n_{i,n}(a') da' + \\ &\sum_{i=1}^N \sum_{n=n_{\text{epc}}+1}^{n_{\max}} \int_{a'_{i,\text{nec}}}^{a'_{i,\text{nepc}}} F_{i,\text{nep}}(a') n_{i,n}(a') da' = \\ \xi_1(N) &\frac{KH(D-1)}{11.2806-3D} \sum_{i=1}^N \left\{ \Delta_i(N) \Lambda_i \cdot \right. \\ &\left[\sum_{n=n_{\text{ec}}+1}^{n_{\text{epc}}} ((a'_{i,n,1})^{1.3801} (a'_{i,\text{nec}})^{-0.3801} - (a'_{i,n,1})^{\frac{D-1}{2}} \cdot \right. \\ &(a'_{i,\text{nec}})^{\frac{3-D}{2}}) + \sum_{n=n_{\text{epc}}+1}^{n_{\max}} ((a'_{i,n,1})^{\frac{D-1}{2}} (a'_{i,\text{nec}})^{-0.3801} \cdot \\ &(a'_{i,\text{nepc}})^{-\frac{D}{2}+1.8801} - (a'_{i,n,1})^{\frac{D-1}{2}} (a'_{i,\text{nec}})^{\frac{3-D}{2}}) \left. \right] \Big\} \quad (34) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_{\text{rp}} &= \sum_{i=1}^N \sum_{n=n_{\text{epc}}+1}^{n_{\max}} \int_{a'_{i,\text{nepc}}}^{a'_{i,n,1}} F_{i,\text{np}}(a') n_{i,n}(a') da' = \\ \xi_1(N) &H \frac{D-1}{3-D} \sum_{i=1}^N \left[\Delta_i(N) \Lambda_i \cdot \right. \\ &\left. \sum_{n=n_{\text{epc}}+1}^{n_{\max}} (a'_{i,n,1} - (a'_{i,n,1})^{\frac{D-1}{2}} (a'_{i,\text{nepc}})^{\frac{3-D}{2}}) \right] \quad (35) \end{aligned}$$

其中 $T_0=8\pi^{1/2}EG^{D-2}(\ln\gamma)^{1/2}/3\sqrt{2}$ 。

第 i 份接触区域上的接触压力 p_i 为

$$p_i = F_{i,\text{r}}/A_{i,\text{r}}, \quad 1 \leq i \leq N \quad (36)$$

式中 $A_{i,\text{r}}$ 和 $F_{i,\text{r}}$ 分别是第 i 份接触区域上的真实接触面积和总接触载荷,可以表示为

$$\begin{aligned} A_{i,\text{r}} &= \sum_{n=n_{\min}}^{n_{\text{ec}}} \int_0^{a'_{i,n,1}} \frac{a'}{2} n_{i,n}(a') da' + \\ &\sum_{n=n_{\text{ec}}+1}^{n_{\max}} \int_0^{a'_{i,\text{nec}}} \frac{a'}{2} n_{i,n}(a') da' + \\ &\sum_{n=n_{\text{ec}}+1}^{n_{\text{epc}}} \int_{a'_{i,\text{nec}}}^{a'_{i,n,1}} \frac{1}{2} (a'_{i,\text{nec}})^{-0.1597} (a')^{1.1597} n_{i,n}(a') da' + \\ &\sum_{n=n_{\text{epc}}+1}^{n_{\max}} \int_{a'_{i,\text{nec}}}^{a'_{i,\text{nepc}}} \frac{1}{2} (a'_{i,\text{nec}})^{-0.1597} (a')^{1.1597} n_{i,n}(a') da' + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\sum_{n=n_{\text{epc}}+1}^{n_{\max}} \int_{a'_{i,\text{nepc}}}^{a'_{i,n,1}} n_{i,n}(a') a' da' \quad (37) \\ F_{i,\text{r}} &= \sum_{n=n_{\min}}^{n_{\text{ec}}} \int_0^{a'_{i,n,1}} F_{i,\text{ne}}(a') n_{i,n}(a') da' + \\ &\sum_{n=n_{\text{ec}}+1}^{n_{\max}} \int_0^{a'_{i,\text{nec}}} F_{i,\text{ne}}(a') n_{i,n}(a') da' + \\ &\sum_{n=n_{\text{ec}}+1}^{n_{\text{epc}}} \int_{a'_{i,\text{nec}}}^{a'_{i,n,1}} F_{i,\text{nep}}(a') n_{i,n}(a') da' + \\ &\sum_{n=n_{\text{epc}}+1}^{n_{\max}} \int_{a'_{i,\text{nec}}}^{a'_{i,\text{nepc}}} F_{i,\text{nep}}(a') n_{i,n}(a') da' + \\ &\sum_{n=n_{\text{epc}}+1}^{n_{\max}} \int_{a'_{i,\text{nepc}}}^{a'_{i,n,1}} F_{i,\text{np}}(a') n_{i,n}(a') da' \quad (38) \end{aligned}$$

4 计算结果与讨论

根据推导出的解析结果,研究粗糙球形表面接触过程中真实接触面积和总接触载荷之间的关系。粗糙球形表面的各项计算参数^[15]如表 1 所示。

表 1 计算参数

参数	取值
D	2.1~2.9
G/m	$1.36 \times 10^{-12} \sim 1.36 \times 10^{-9}$
E/Pa	7.2×10^{10}
ν	0.17
H/Pa	5.5×10^9
n	17~101
N	100~1 000
L_s/m	1.0×10^{-9}
r/m	0.1

接触区域被分成 N 份,每份都包含不同频率指数的微凸体,分别独立给出每个频率指数微凸体的最大截断面积会导致结果数据冗余且无规律可循。为了使计算结果符合实际情况,规定在第 i 份接触区域内,各个频率指数的微凸体中具有最大截断面积的微凸体,其接触下压量与自身高度的比值都相同。根据表 1 的数据,可以得到微凸体的临界弹性频率指数 $n_{\text{ec}}=33$,临界弹塑性频率指数 $n_{\text{epc}}=46$ 。

粗糙球形表面在接触过程中,不同频率指数范围微凸体产生的接触面积 A_{nr} 与总真实接触面积 A_{r} 的比值如图 4 所示,频率指数范围 1、2、3 分别表示频率指数的统计区间为 17~65、38~65、53~65。图 4a 为下压量 $\omega=0.5\delta_{n_{\min}}$ 时的情况,可以看出:对于同一频率指数范围,最小频率指数的微凸体产生

的真实接触面积与总真实接触面的比值最大,随着频率指数的增大,比值逐渐减小;对于不同频率指数范围,前6个频率指数产生的真实接触面积占总真实接触面积的99%以上, $\sum_{n=17}^{22} A_{nr}/A_r = 0.992\ 3$, $\sum_{n=38}^{43} A_{nr}/A_r = 0.991\ 8$, $\sum_{n=53}^{58} A_{nr}/A_r = 0.993\ 6$ 。此外,当频率指数范围为17~65、38~65、53~65时,频率指数为17、38和53的微凸体的高度分别为 $2.461 \times 10^{-7}\text{ m}$ 、 $1.49 \times 10^{-9}\text{ m}$ 、 $3.87 \times 10^{-11}\text{ m}$ 。图4b为 $\omega = 0.4\delta_{n_{\min}}$ 和 $\omega = 0.8\delta_{n_{\min}}$ 的情况,可以看出:各频率指数微凸体产生的接触面积与总真实接触面积的比值基本不受下压量的影响,其变化规律与图4a相似。因此可得,对于任意一个频率指数范围的粗糙球形表面,都是前6个频率指数的微凸体对整个接触过程起主导作用。

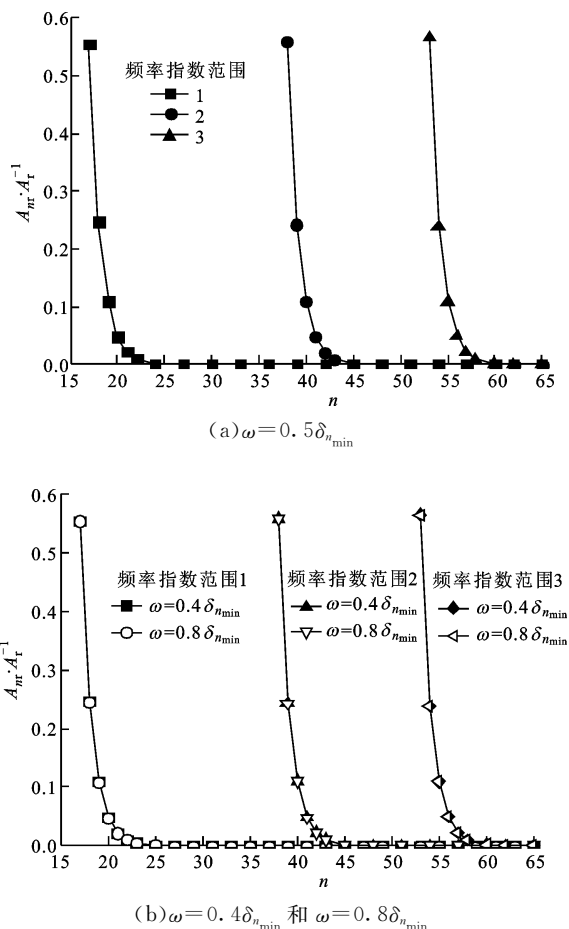


图4 不同频率指数范围微凸体产生的真实接触面积与总真实接触面积的比值变化

图5表示当微凸体频率指数范围为17~65、 $\omega = 0.95\delta_{n_{\min}}$ 时,粗糙球形表面接触过程中总真实接触面积 A_r 与总接触载荷 F_r 的关系,可以看出:粗糙

球形表面在整个接触过程中近似表现为弹性性质,总接触载荷与真实接触面积的 $3/2$ 次方成正比,即 $F_r \sim A_r^{3/2}$ 。这是因为临界弹性频率指数 $n_{ec} = 33$,所以频率指数处于17~33的微凸体只能发生弹性变形。又由于在分形粗糙表面接触过程中,前6个频率指数的微凸体对整个接触过程起主导作用,即使频率指数处于34~65的微凸体发生弹塑性或完全塑性变形,其比例在总接触载荷和总真实接触面积中小于0.01。

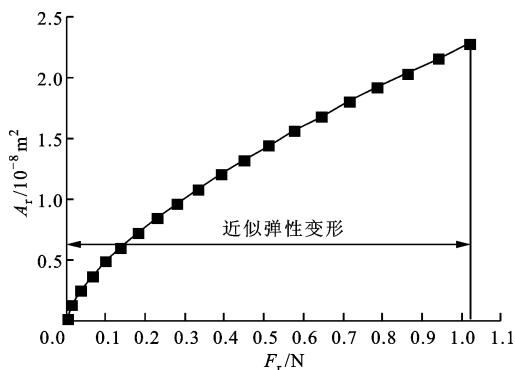


图5 真实接触面积与总接触载荷的关系

图6与图7表示微凸体频率指数范围为38~86时,粗糙球形表面接触过程中的变形状况。频率指数处于38~46的微凸体在接触过程中可以发生弹性变形和弹塑性变形,频率指数处于47~86的微凸体可以发生弹性变形、弹塑性变形及完全塑性变形。

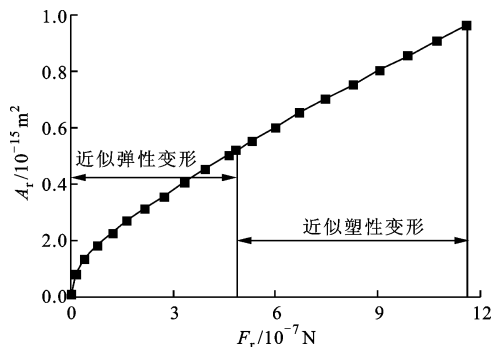


图6 真实接触面积与总接触载荷的关系

图6表示真实接触面积与总接触载荷的关系,可以看出:当总接触载荷满足 $F_r < 4.86 \times 10^{-7}\text{ N}$ 时,粗糙球形表面近似表现出弹性变形的性质,总接触载荷和接真实接触面积的关系近似满足 $F_r \sim A_r^{3/2}$;当 $F_r > 4.86 \times 10^{-7}\text{ N}$,总接触载荷和接真实接触面积的关系近似满足 $F_r \sim A_r^{1.19}$,粗糙球形表面表现为弹塑性变形性质。

图7为接触区域的变形状况。图7a是当 $\omega =$

0.35 $\delta_{n_{\min}}$ 时的接触区域变形情况,可以看出:接触区域被分成 N_1 份($N_1=100$);第 1 份接触区域发生弹塑性变形,其余各份接触区域都呈现近似弹性变形。因为弹塑性变形与总变形的比值十分小,此时接触变形状态仍呈现为弹性质。图 7b 和图 7c 分别是当 $\omega=0.52\delta_{n_{\min}}$ 和 $\omega=0.68\delta_{n_{\min}}$ 时的接触区域变形情况,可以看出:随着接触下压量的增加(接触区域增大,接触区域所分的份数也逐渐增加,以确保不同下压量下第 i 份接触区域的面积近似保持一致),弹塑性变形区域逐渐增大,弹塑性变形占总变形的比例也逐渐增大。当这个比例大于 60% 时,粗糙球形表面逐渐显现弹塑性变形性质。

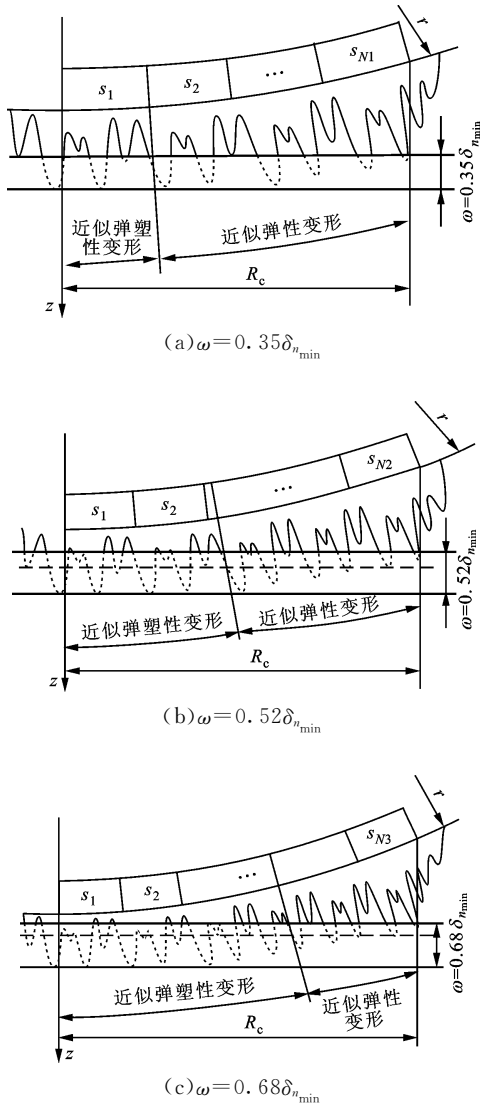


图 7 接触区域的变形状况

图 8 表示当微凸体频率指数范围为 53~101 时,粗糙球形表面接触过程中的变形状况,可以看出:当总接触载荷满足 $F_r < 1.08 \times 10^{-11}$ N 时,弹塑性变形与总变形的比值小于 60%,总接触载荷和总

真实接触面积的关系近似满足 $F_r \sim A_r^{1.19}$;当 $F_r > 1.08 \times 10^{-11}$ N 时,总接触载荷和总真实接触面积的关系近似满足 $F_r \sim A_r$,粗糙球形表面表现为完全塑性变形性质。

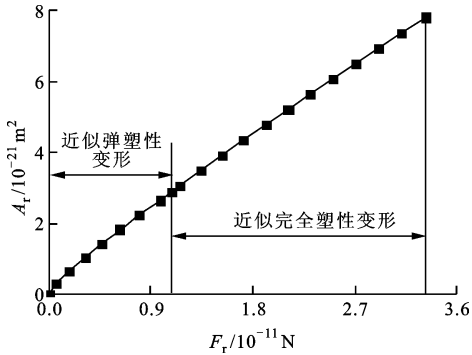
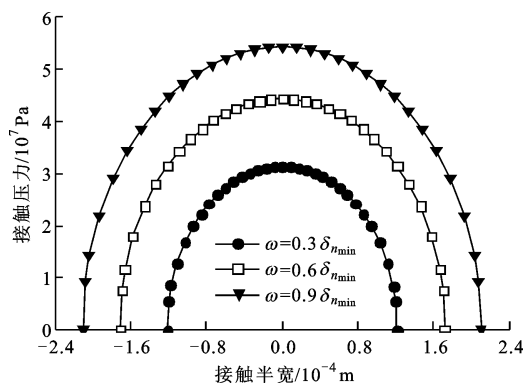


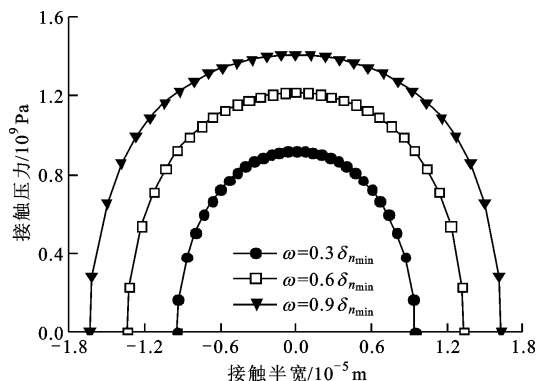
图 8 真实接触面积与总接触载荷的关系

图 9 表示接触区域上接触压力的分布规律。图 9a 表示当微凸体频率指数范围为 17~65 时的情况,可以分析得出:粗糙球形表面的接触半宽与接触压力成正比;粗糙球形表面在接触过程中呈现弹性性质,压力分布曲线近似抛物线,与赫兹接触模型的压力分布较为相似。图 9b 表示当微凸体频率指数范围为 38~86 时的情况,可以分析得出:当 $\omega = 0.3\delta_{n_{\min}}$ 时,粗糙球形表面呈现弹性变形性质,接触压力分布近似为抛物线;当 $\omega = 0.6\delta_{n_{\min}}$ 和 $\omega = 0.9\delta_{n_{\min}}$ 时,粗糙球形表面呈现弹塑性变形性质,接触压力分布曲线的顶端变得较为平缓。图 9c 表示当微凸体频率指数范围为 53~101 时的情况,可以分析得出:当 $\omega = 0.3\delta_{n_{\min}}$ 时,粗糙球形表面呈现弹塑性变形性质,接触压力分布曲线的顶端较为平缓;当 $\omega = 0.6\delta_{n_{\min}}$ 和 $\omega = 0.9\delta_{n_{\min}}$ 时,粗糙球形表面呈现弯曲塑性变形性质,接触压力分布曲线的顶端趋于直线,其轮廓近似为一个矩形,这表明接触压力在接触半宽上近似均匀分布。

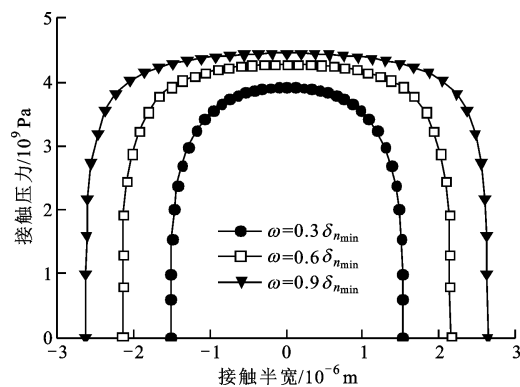
为了研究粗糙球形表面接触模型与赫兹接触模型之间的差别,只考虑粗糙球形表面接触的弹性变形阶段。图 10 是本文模型与赫兹接触模型的接触压力对比,频率指数范围 1、2、3 分别表示频率指数的统计区间为 17~65、18~66、19~67。图 10a 是接触半宽上压力分布的对比,可以看出:由于在粗糙球形表面接触过程中基圆不发生变形,接触半宽近似为赫兹接触模型的接触半宽的 $\sqrt{2}$ 倍;当 $D=2.4$ 、 $G=1.36 \times 10^{-11}$ m、最小频率指数为 18 时,粗糙球形表面的接触压力峰值与赫兹模型最为接近。图 10b 是接触压力峰值的对比,可以看出:在整个接触



(a) 频率指数范围为 17~65



(b) 频率指数范围为 38~86

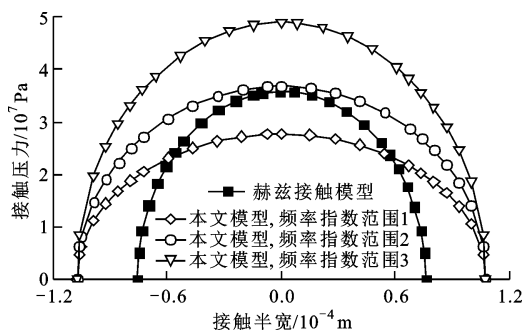


(c) 频率指数范围为 53~101

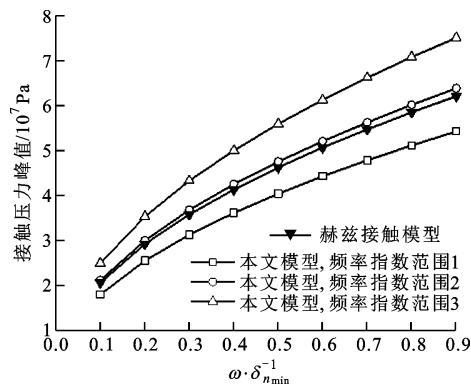
图9 接触区域上接触压力的分布规律

过程中,频率指数范围2的粗糙球形表面接触压力峰值始终与赫兹模型最为接近;当微凸体频率指数最小值增大,即微凸体顶端曲率半径减小时,压力峰值就会增大,否则压力峰值减小。

为了获得粗糙球形表面接触模型与赫兹接触模型之间的内在联系,只考虑粗糙球形表面接触的弹性变形阶段。为寻求本文模型与赫兹接触模型在接触下压量相等时,接触压力峰值也同样相等的存在条件,构建两模型中各分形参数的关系,如图11所示,图中 $R_{\min}$ 表示最小频率指数的微凸体顶端曲率



(a) 接触半宽上压力分布的对比



(b) 接触压力峰值的对比

图10 本文模型与赫兹接触模型的接触压力对比

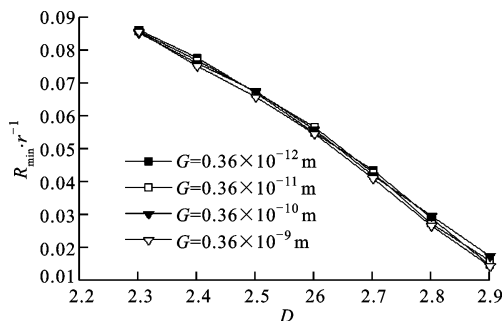


图11 本文模型与赫兹接触模型的压力峰值相等时各分形参数之间的关系

半径,可以看出, G 在 $1.36 \times 10^{-9} \sim 1.36 \times 10^{-12}$ m之间变化,对 D 与 $R_{\min}/r$ 的关系影响很小。忽略 G 的影响,对图11中的曲线进行拟合可得

$$R_{\min}/r = f(D) = -0.0639D^2 + 0.197D - 0.0287 \quad (39)$$

对于给定的分形维数 D ,最小频率指数的微凸体顶端曲率半径与基圆半径比值 $R_{\min}/r$ 满足式(39)。对于相同的接触下压量,粗糙球形表面接触模型的接触压力峰值始终等于赫兹接触模型的接触压力峰值。如果 $R_{\min}/r > f(D)$,则粗糙球形表面接触模型的压力峰值小于赫兹接触模型的压力峰值;否则,粗糙球形表面接触模型的压力峰值大于赫兹接触模型

的压力峰值。从工程应用考虑,为了确保接触零件的安全使用,在额定下压量的情况下,应尽量增大表面微凸体顶端曲率半径,降低表面粗糙度。

5 结 论

(1)微凸体的频率指数范围直接影响粗糙球形表面的接触力学性质,前6个频率指数的微凸体在整个接触过程中起主导作用。最小频率指数 $n_{\min}$ 与临界弹性频率指数 n_{ec} 满足 $n_{\min} + 5 \leq n_{ec}$,粗糙球形表面在整个接触过程表现出弹性变形行为。最小频率指数 $n_{\min}$ 处于临界弹性频率指数 n_{ec} 与临界弹塑性频率指数 n_{epc} 之间,粗糙表面在初始接触时表现为弹性变形行为,随着接触载荷的增大,逐渐呈现为弹塑性变形行为。当 $n_{\min} > n_{epc}$ 时,粗糙球形表面在整个接触过程中都呈现非弹性变形行为,这是因为弹性变量形远远小于总变形量。

(2)粗糙球形表面的接触半宽主要取决于基圆半径,微凸体的几何尺寸对其影响很小。当粗糙球形表面处于弹性或弹塑性变形阶段时,接触压力分布曲线近似为抛物线,接触压力在接触区域中心达到最大,向接触区域边缘方向递减。在完全塑性变形阶段,接触压力分布曲线的轮廓近似为矩形,接触压力在整个接触区域上均匀分布。

(3)在弹性变形阶段,粗糙球形表面接触模型与赫兹接触模型的差别在于:①在相同下压量下,粗糙球形表面接触模型的接触半宽始终是赫兹接触模型的接触半宽的 $\sqrt{2}$ 倍;②最小频率指数微凸体的曲率半径与基圆半径满足 $R_{\min}/r = f(D)$,在相同接触下压量下,两个模型的接触压力峰值始终相等,如果 $R_{\min}/r > f(D)$,则粗糙球形表面接触模型的压力峰值小于赫兹接触模型的压力峰值,如果 $R_{\min}/r < f(D)$,则粗糙球形表面接触模型的压力峰值大于赫兹接触模型的压力峰值,如果 $R_{\min}/r$ 越偏离 $f(D)$,则粗糙球形表面接触模型的压力峰值与赫兹接触模型的压力峰值差别越大。

参考文献:

- [1] KUCHARSKI S, STARZYNSKI G. Study of contact of rough surfaces: modeling and experiment [J]. Wear, 2014, 311(1/2): 167-179.
- [2] TODOROVIC P, TADIC B, VUKELIC D. Analysis of the influence of loading and the plasticity index on variations in surface roughness between two flat surfaces [J]. Tribology International, 2015, 81: 276-

282.

- [3] WADDAD Y, MAGNIER V, DUFRENOY P. A multiscale method for frictionless contact mechanics of rough surfaces [J]. Tribology International, 2016, 96: 109-121.
- [4] 史建成,刘检华,丁晓宇,等. 基于确定性模型的金属表面多尺度接触行为研究 [J]. 机械工程学报, 2017, 53(3): 111-120.
SHI Jiancheng, LIU Jianhua, DING Xiaoyu, et al. On the multi-scale contact behavior of metal rough surface based on deterministic model [J]. Journal of Mechanical Engineering, 2017, 53(3): 111-120.
- [5] 王庆朋,张力,陈斌,等. 考虑微凸体相互作用的确定性接触模型 [J]. 西安交通大学学报, 2018, 52(3): 91-97.
WANG Qingpeng, ZHANG Li, CHEN Bin, et al. A deterministic contact model considering the interaction between asperities [J]. Journal of Xi'an Jiaotong University, 2018, 52(3): 91-97.
- [6] PRASANTA S, NILOY G. Finite element contact analysis of fractal surfaces [J]. Journal of Physics: D Applied Physics, 2007, 40(14): 4245-4252.
- [7] GREENWOOD J A, WILLIAMSON J B P. Contact of nominally flat surfaces [J]. Proceedings of the Royal Society of London, 1966, 295: 300-319.
- [8] LIN L P, LIN J F. An elastoplastic microasperity contact model for metallic materials [J]. ASME Journal of Tribology, 2005, 127(3): 666-672.
- [9] GALANOV B A. Models of adhesive contact between rough elastic solids [J]. International Journal of Mechanical Science, 2011, 53(11): 968-977.
- [10] KADIN Y, KLIGERMAN Y, ETSION I. Unloading an elastic-plastic contact of rough surfaces [J]. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 2006, 54(12): 2652-2674.
- [11] VAKIS A I. Asperity interaction and substrate deformation in statistical summation models of contact between rough surfaces [J]. Journal of Applied Mechanics, 2014, 81(4): 0410121.
- [12] MANDELBROT B B. The fractal geometry of nature [M]. New York, NY, USA: WH Freeman Publishers, 1982: 105-120.
- [13] MAJUMDAR A, TIEN C L. Fractal characterization and simulation of rough surfaces [J]. Wear, 1990, 136(2): 313-327.
- [14] MAJUMDAR A, BHUSHAN B. Fractal model of elastic-plastic contact between rough surfaces [J]. ASME Journal of Tribology, 1991, 113(1): 1-11.

- [15] YAN W, KOMVOPOULOS K. Contact analysis of elastic-plastic fractal surfaces [J]. *Journal of Applied Physics*, 1998, 84(7): 3617-3624.
- [16] HAN J H, SHAN P, HU S S. Contact analysis of fractal surfaces in earlier stage of resistance spot welding [J]. *Materials Science and Engineering: A*, 2006, 435: 204-211.
- [17] YIN X, KOMVOPOULOS K. An adhesive wear model of fractal surfaces in normal contact [J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2010, 47(7/8): 912-921.
- [18] JIANG S Y, ZHENG Y J, ZHU H. A contact stiffness model of machined plane joint based on fractal theory [J]. *ASME Journal of Tribology*, 2010, 132(1): 0114011.
- [19] MORAG Y, ETSION I. Resolving the contradiction of asperities plastic to elastic mode transition in current contact models of fractal rough surfaces [J]. *Wear*, 2007, 262(5/6): 624-629.
- [20] YUAN Y, CHENG Y, LIU K. et al. A revised Majumdar and Bushan model of elastoplastic contact between rough surfaces [J]. *Applied Surface Science*, 2017, 425: 1138-1157.
- [21] 原园, 成雨, 张静. 基于分形的三维粗糙表面弹塑性接触力学模型与试验验证 [J]. *工程力学*, 2018, 35(6): 209-221.
- YUAN Yuan, CHENG Yu, ZHANG Jing. Fractal based elastoplastic mechanics model for contact with rough surface and its experimental verification [J]. *Engineering Mechanics*, 2018, 35(6): 209-221.
- [22] 原园, 张静, 成雨. 圆柱形粗糙表面的弹塑性分形接触模型 [J]. *中国科学: 技术科学*, 2017, 47(5): 52-63
- YUAN Yuan, ZHANG Jing, CHENG Yu. An elastoplastic fractal model for cylinder in contact with a smooth plane [J]. *Scientia Sinica: Technologica*, 2017, 47(5): 52-63.
- [23] 陈建江, 原园, 徐颖强. 粗糙表面的加卸载分形接触解析模型 [J]. *西安交通大学学报*, 2018, 52(3): 98-110.
- CHEN Jianjiang, YUAN Yuan, XU Yingqiang. An analytical model of loading-unloading contact between rough surfaces based on fractal theory [J]. *Journal of Xi'an Jiaotong University*, 2018, 52(3): 98-110.
- [24] LIOU J L, TSAI M T, LIN J F. A microcontact model developed for sphere- and cylinder-based fractal bodies in contact with a rigid flat surface [J]. *Wear*, 2010, 268(3/4): 431-442.

(编辑 陶晴)

(上接第156页)

- [16] 王安麟, 石世宁. 基于响应面法的中型挖掘机模型参数标定 [J]. *机械设计*, 2013, 30(7): 59-63.
- WANG Anlin, SHI Shining. Parameter calibration for medium excavator model based on response surface methodology [J]. *Journal of Machine Design*, 2013, 30(7): 59-63.
- [17] 姜涛, 付志翼, 王安麟. 一种非平稳随机循环工况下的参数化载荷模型 [J]. *东北大学学报(自然科学版)*, 2016, 37(6): 845-850.
- JIANG Tao, FU Zhiyi, WANG Anlin. Parameterized load model under non-stationary random cyclic conditions [J]. *Journal of Northeastern University (Natural Science)*, 2016, 37(6): 845-850.
- [18] 王安麟, 石世宁, 李晓田. 挖掘机动态性能试验及其数据的小波处理方法 [J]. *同济大学学报(自然科学版)*, 2014, 42(1): 115-123.
- WANG Anlin, SHI Shining, LI Xiaotian. Dynamic performance test and wavelet processing method for non-stationary random data of hydraulic excavator [J]. *Journal of Tongji University (Natural Science)*, 2014, 42(1): 115-123.

(编辑 陶晴)