

DOI: 10.7652/xjtuxb201908002

# 谐波齿轮传动双圆弧齿形双向共轭设计方法

姜歌东<sup>1,2,3</sup>, 王爽<sup>1,3</sup>, 梅雪松<sup>1,2,3</sup>, 张弦<sup>1,3</sup>, 张豪<sup>1,3</sup>

(1. 西安交通大学陕西省智能机器人重点实验室, 710049, 西安; 2. 西安交通大学机械制造系统工程国家重点实验室, 710049, 西安; 3. 西安交通大学机械工程学院, 710049, 西安)

**摘要:** 针对目前广泛采用的双圆弧齿形单向共轭设计方法存在的刚轮凸圆弧段共轭齿廓不确定问题,提出了一种基于柔轮和刚轮齿形联合共轭计算的双圆弧齿形双向共轭设计方法。该方法通过预设柔轮凸圆弧参数来进行共轭计算和拟合得到刚轮的双圆弧齿廓;增加了刚轮凸圆弧齿廓反向共轭计算得到柔轮凹圆弧齿廓的计算过程;将柔轮的拟合凹圆弧和预设凸圆弧相结合得到柔轮整体齿形;保证了刚轮凸圆弧段与柔轮两段圆弧均能共轭啮合。双圆弧齿形的啮合侧隙分析与有限元接触分析结果表明:与单向共轭法的设计结果相比,双向共轭法所设计的双圆弧齿形在整个齿廓段都能参与啮合,存在多点啮合现象,具有更大的齿廓接触面积和更小的齿面接触应力,提升了谐波齿轮传动的啮合性能。

**关键词:** 谐波齿轮;双圆弧齿形;侧隙分析;有限元接触分析

**中图分类号:** TH132.2 **文献标志码:** A **文章编号:** 0253-987X(2019)08-0008-07

## Bidirectional Conjugate Design Method for Double-Circular-Arc Tooth Profile of Harmonic Drives

JIANG Gedong<sup>1,2,3</sup>, WANG Shuang<sup>1,3</sup>, MEI Xuesong<sup>1,2,3</sup>, ZHANG Xian<sup>1,3</sup>, ZHANG Hao<sup>1,3</sup>

(1. Shaanxi Key Laboratory of Intelligent Robots, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China;  
2. State Key Laboratory for Manufacturing Systems Engineering, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China;  
3. School of Mechanical Engineering, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China)

**Abstract:** A novel bidirectional conjugate design method is proposed to solve the uncertain problem of the conjugated convex circular-arc tooth profile of circular spline existing in the widely used unidirectional conjugate design method of double-circular-arc tooth profile. The proposed method is based on the combined conjugate calculation of the tooth profiles of flexspline and circular spline. The double-circular-arc tooth profile of a circular spline is obtained through conjugate calculation and fitting via presetting parameters of the convex circular arc of the flexspline. The concave circular arc of the flexspline is obtained through a reverse conjugate calculation of the convex circular arc profile of the circular spline. The whole tooth profile of the flexspline is obtained by combining the fitted concave arc with the preset convex arc of the flexspline. The method ensures that the convex arc of the circular spline is conjugated with both arcs of the flexspline. Meshing backlash analysis and finite element contact analysis of a double-circular-arc tooth profile are carried out. Results and a comparison with the unidirectional conjugate method show that the tooth profile designed by the bidirectional conjugate method is

收稿日期: 2018-12-28。 作者简介: 姜歌东(1971—),女,教授,博士生导师。 基金项目: 国家自然科学基金资助项目(51675407);陕西省科技统筹创新工程计划资助项目(2015KTZDGY-02-01)。

网络出版时间: 2019-06-04 网络出版地址: <http://kns.cnki.net/kcms/detail/61.1069.T.20190603.1110.014.html>

able to engage on whole tooth profile, has multi-point meshing property, and possesses larger tooth contact area and smaller contact stress on the tooth surface. It is concluded that the proposed method improves the meshing performance of harmonic drives.

**Keywords:** harmonic drive; double-circular-arc tooth profile; backlash analysis; finite element contact analysis

谐波齿轮传动是 20 世纪 50 年代诞生的一种传动技术。根据谐波齿轮传动原理构建的传动装置(即谐波减速器)具有传动比大、回转精度高、体积小等特点,适用于对精密传动有较高要求的场合,被广泛应用在机器人、航空航天、精密仪器等领域。

在谐波齿轮传动中,齿形会对传动啮合性能有很大的影响。最初 Musser 发明谐波传动使用的是直线齿形<sup>[1]</sup>,后来由工艺性较好的渐开线齿形代替,逐渐发展到更符合啮合原理的新齿形<sup>[2]</sup>;日本学者 Ishikawa 提出通过齿条近似法得到基本实现连续接触的“S 齿形”<sup>[3]</sup>;辛洪兵在圆弧齿廓的基础上提出柔轮和刚轮双圆弧基本齿廓设计方法<sup>[4]</sup>。目前国内所研究的双圆弧齿形如图 1 所示,其工作齿廓由两段圆弧段构成,中间通过公切线段平滑连接。

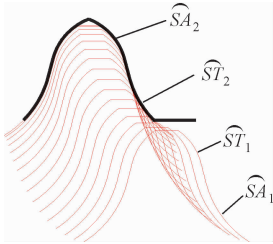


图 1 双圆弧齿形及啮合运动

谐波齿轮传动常用的啮合参数计算方法有侧隙控制法<sup>[5]</sup>、齿条近似法<sup>[6]</sup>和共轭齿廓法等,其中共轭齿廓法主要包括改进运动学法<sup>[7]</sup>和包络法<sup>[8]</sup>。由于共轭齿廓法所得到的设计齿廓能够实现共轭啮合,被广泛应用于双圆弧齿形设计中。现有的双圆弧齿形设计方法如图 2 所示<sup>[4]</sup>,根据图 1 中的啮合运动,柔轮齿顶凸圆弧 $\widehat{ST}_1$  经过共轭齿廓求解得到共轭齿廓 $\widehat{CT}_1$ 、 $\widehat{CT}_2$ 。柔轮齿根凹圆弧 $\widehat{SA}_1$  经过共轭求解得到共轭齿廓 $\widehat{CA}_1$ 。由 $\widehat{CT}_1$  拟合得到刚轮齿根凹圆弧 $\widehat{SA}_2$ ,而刚轮齿顶凸圆弧 $\widehat{ST}_2$  需要综合考虑 $\widehat{CT}_2$  和 $\widehat{CA}_1$  的位置关系,选择其外侧部分以避免干涉。本文将这种方法称为单向共轭法,简称单向法,目前谐波传动双圆弧齿形设计大多采用这种方法<sup>[9-11]</sup>。

双圆弧齿形共轭齿廓求解结果可能出现如图 3 所示的 3 种情况<sup>[12]</sup>。刚轮凸圆弧 $\widehat{ST}_2$  由图 3a 中

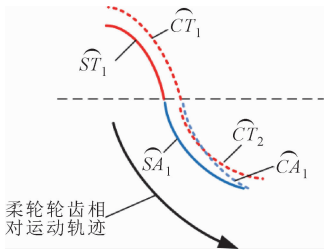


图 2 双圆弧共轭齿廓

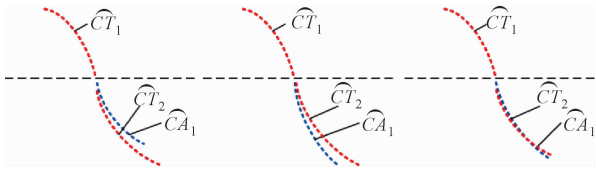


图 3 共轭齿廓分布情况

$\widehat{CA}_1$  确定时,存在双共轭现象,但是啮合区较小。由图 3b 中 $\widehat{CT}_2$  确定时,存在二次共轭现象,但是 $\widehat{SA}_1$  没有参与啮合,啮合的接触面较小。图 3c 中 $\widehat{CA}_1$  与 $\widehat{CT}_2$  有交叉,得到的共轭齿廓不能光滑过渡,影响传动平稳性。

单向共轭法在设计双圆弧齿形时存在刚轮凸圆弧段不确定问题,难以满足在啮合时齿廓的接触面和啮合区均达到最大,即 $\widehat{CA}_1$  与 $\widehat{CT}_2$  尽量重合的要求<sup>[9]</sup>。通过齿形参数优化可以改善上述问题,但由于双圆弧齿形参数较多,优化设计过程十分繁琐<sup>[13]</sup>。

本文根据双圆弧齿形的分段特点,提出了一种将柔轮和刚轮的齿形进行联合共轭计算的双向共轭设计方法,该方法解决了单向共轭法存在的刚轮凸圆弧段共轭齿廓不确定问题,同时减少所需的设计变量,为谐波齿轮传动双圆弧齿形设计提供了一种新的思路。

## 1 双向共轭齿形设计方法

本文提出的双向共轭法在进行双圆弧齿形设计时的流程如图 4 所示。

根据设计要求进行参数预设,确定柔轮凸圆弧 $\widehat{ST}_1$ ;根据包络法求解 $\widehat{ST}_1$  得到共轭齿廓 $\widehat{CT}_1$  和 $\widehat{CT}_2$ ;通过圆弧拟合,将共轭齿廓 $\widehat{CT}_1$  和 $\widehat{CT}_2$  分别拟

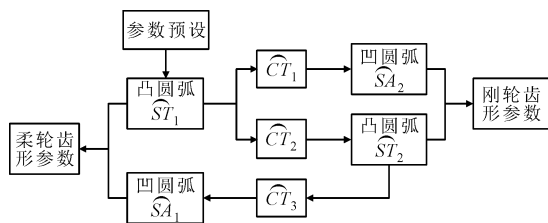


图4 双向共轭法设计流程

合得到刚轮凹圆弧 $\widehat{SA}_2$ 和凸圆弧 $\widehat{ST}_2$ ；计算公切线和过渡曲线，得到刚轮的齿形参数。根据包络法求解 $\widehat{ST}_2$ 得到共轭齿廓 $\widehat{CT}_3$ ，将 $\widehat{CT}_3$ 拟合得到柔轮凹圆弧齿廓 $\widehat{SA}_1$ 。根据 $\widehat{ST}_1$ 和 $\widehat{SA}_1$ 计算公切线和过渡曲线，得到柔轮的齿形参数。下面对双向共轭法的详细计算过程进行说明。

### 1.1 谐波传动坐标系与几何关系

谐波传动平面啮合计算时满足以下假设<sup>[14]</sup>：①原始曲线不伸长；②柔轮变形后的各特征曲线均视为原始曲线的等距曲线；③柔轮轮齿不变形并沿原始曲线均布；④将波发生器视为刚体。

建立波发生器坐标系 $\{OXY\}$ ，柔轮轮齿坐标系 $\{o_1x_1y_1\}$ ，刚轮坐标系 $\{o_2x_2y_2\}$ ，如图5所示。此时，变形前的柔轮中性层半径 $r_m$ 为

$$r_m = (D_b + \delta_f)/2 \quad (1)$$

式中： $D_b$ 为柔性轴承外径； $\delta_f$ 为柔轮齿根处壁厚。变形后的原始曲线的矢径为

$$\rho(\varphi) = r_m + \omega(\varphi) \quad (2)$$

式中： $\varphi$ 为位置角参数，即与波发生器长轴的夹角； $\omega$ 为原始曲线径向位移，由波发生器外廓线确定。根据柔轮变形<sup>[14]</sup>可以得到

$$\left. \begin{aligned} v &= -\int \omega d\varphi \\ \mu &= -\arctan(\dot{\rho}/\rho) \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

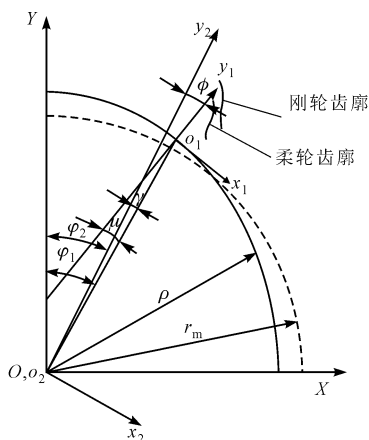


图5 谐波传动各坐标系

式中： $v$ 为中性层周向位移； $\mu$ 为中性层法向转角。根据柔轮中性层曲线不伸长假设和几何关系可知

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1 &= \varphi + v/r_m \\ \varphi_2 &= (z_1/z_2)\varphi \\ \gamma &= \varphi_1 - \varphi_2 \\ \phi &= \mu + \gamma \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

式中： $\varphi_1$ 为柔轮变形端转角； $\varphi_2$ 为刚轮转角； $z_1$ 、 $z_2$ 分别为柔轮和刚轮的齿数； $\gamma$ 为柔轮与刚轮的转角差； $\phi$ 为柔轮坐标系与刚轮坐标系的 $y$ 轴夹角。

### 1.2 通过参数预设确定柔轮凸圆弧齿廓

在坐标系 $\{o_1x_1y_1\}$ 下柔轮的凸圆弧 $\widehat{ST}_1$ 如图6所示，图6中圆弧 $\widehat{AB}$ 段就是 $\widehat{ST}_1$ 。这里除了前面提到的结构参数外，还需要预设参数：包括齿厚比 $K$ 、柔轮齿顶高 $h_{a1}$ 、柔轮齿根高 $h_{f1}$ 、刚轮齿顶高 $h_{a2}$ 、刚轮齿根高 $h_{f2}$ 、柔轮凸圆弧段齿高 $h_1$ 、圆弧倾角 $\beta$ 。

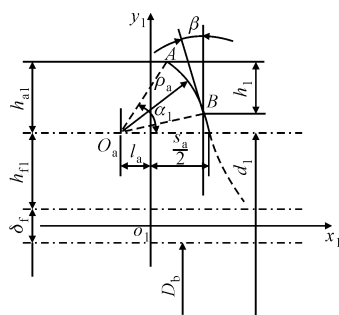


图6 柔轮凸圆弧齿廓

完成参数预设后，开始计算柔轮凸圆弧齿廓参数。谐波减速器柔轮内壁与柔性轴承配合，其内径直接选用标准柔性轴承的外径，柔轮的节圆直径为

$$d_1 = D_b + 2\delta_f + 2h_{f1} \quad (5)$$

节圆齿厚为

$$S_a = \pi d_1 / [(1 + K)z_1] \quad (6)$$

柔轮凸圆弧半径为

$$\rho_a = (h_{a1} - h_1) / \sin\beta \quad (7)$$

凸圆弧圆心在节圆上，其到对称轴的距离为

$$l_a = \rho_a / \cos\beta - S_a / 2 \quad (8)$$

在柔轮轮齿坐标系 $\{o_1x_1y_1\}$ 中，以到齿顶点 $A$ 的弧长 $s$ 为参数将柔轮凸圆弧齿廓坐标表示为

$$\left. \begin{aligned} x_1(s) &= \rho_a \cos(\alpha_1 - s/\rho_a) + x_{O_a} \\ y_1(s) &= \rho_a \sin(\alpha_1 - s/\rho_a) + y_{O_a} \\ x_{O_a} &= -l_a \\ y_{O_a} &= h_{f1} + \delta_f/2 \\ \alpha_1 &= \arcsin(h_{a1}/\rho_a) \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

式中：参数 $s$ 的范围为 $[0, \rho_a(\alpha_1 - \beta)]$ ； $\alpha_1$ 为齿顶 $A$

的压力角; $(x_{O_a}, y_{O_a})$ 为柔轮凸圆弧圆心坐标。

1.3 求解刚轮齿形

根据几何关系,将柔轮齿廓点转换到刚轮坐标系下

$$\begin{bmatrix} x_{21} \\ y_{21} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\phi & \sin\phi & \rho\sin\gamma \\ -\sin\phi & \cos\phi & \rho\cos\gamma \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (10)$$

将齿廓坐标代入包络方程<sup>[14]</sup>

$$\frac{\partial x_{21}(s,\varphi)}{\partial s} \frac{\partial y_{21}(s,\varphi)}{\partial \varphi} - \frac{\partial x_{21}(s,\varphi)}{\partial \varphi} \frac{\partial y_{21}(s,\varphi)}{\partial s} = 0 \quad (11)$$

求解得到关于参数  $s$  和  $\varphi$  的隐函数,对于圆弧齿廓难以得到解析解,将参数  $s$  离散后可以得到所对应的解  $\varphi$ ,将对应解回代得到满足条件的共轭齿廓点坐标,得到离散共轭齿廓段 $\widehat{CT}_1$ 和 $\widehat{CT}_2$ 。

分别对 $\widehat{CT}_1$ 和 $\widehat{CT}_2$ 段进行最小二乘圆弧拟合,对于 $\widehat{CT}_1$ 得到拟合圆心和半径。分别调整两段圆弧半径使得 $\widehat{CT}_1$ 点在圆弧内, $\widehat{CT}_2$ 点在圆弧外,以避免齿廓发生干涉,根据刚轮的齿高确定工作齿高范围,将范围内的拟合圆弧段分别确定为 $\widehat{SA}_2$ 和 $\widehat{ST}_2$ 。计算两圆弧公切线段,得到完整的刚轮工作齿廓。计算与刚轮齿根圆相切的过渡曲线,完成刚轮的齿形设计,如图 7 所示,其中 $\widehat{VS}$ 段为凸圆弧段 $\widehat{ST}_2$ ,半径为 $\rho_p$ ,圆心偏移为 $l_p, b_p$ , $\widehat{RU}$ 段为凹圆弧段 $\widehat{SA}_2$ ,半径为 $\rho_q$ ,圆心偏移为 $l_q, b_q$ , $\widehat{SR}$ 段为公切线段。

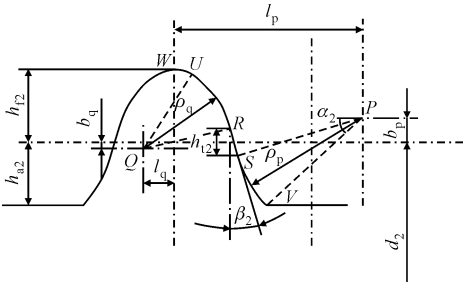


图 7 刚轮双圆弧齿形

1.4 求解柔轮齿形

在刚轮坐标系 $\{O_2x_2y_2\}$ 中,刚轮凸圆弧齿廓坐标以到齿顶点  $V$  的弧长  $s$  为参数表示为

$$\left. \begin{aligned} x_2(s) &= -\rho_p \cos(\alpha_2 - s/\rho_p) + x_p \\ y_2(s) &= -\rho_p \sin(\alpha_2 - s/\rho_p) + y_p \\ \alpha_2 &= \arcsin(y_p - y_v)/\rho_p \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

式中:参数  $s$  的范围为 $[0, \rho_p(\alpha_2 - \beta_2)]$ ;  $\alpha_2$  为齿顶的压力角; $(x_p, y_p)$ 为刚轮凸圆弧圆心坐标。同理,将刚轮齿廓点转换到柔轮坐标系下

$$\begin{bmatrix} x_{12} \\ y_{12} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\phi & \sin\phi & \rho\sin\gamma \\ -\sin\phi & \cos\phi & \rho\cos\gamma \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (13)$$

将齿廓坐标代入包络方程,求解方法与前面相同,得到满足条件的离散共轭齿廓 $\widehat{CT}_3$ 。

同理,采用相同的拟合方法得到拟合圆心和半径,然后调整半径使 $\widehat{CT}_3$ 点在拟合圆弧的内侧,以保证不发生齿廓干涉。根据柔轮的齿高范围,将范围内的圆弧段确定为 $\widehat{SA}_1$ 。结合凸圆弧 $\widehat{ST}_1$ ,计算公切线段和过渡曲线段,完成柔轮齿形设计,如图 8 所示,其中 $\widehat{CD}$ 段为凹圆弧段 $\widehat{SA}_1$ ,半径为 $\rho_f$ ,圆心偏移为 $l_f, b_f$ , $\widehat{BC}$ 段为公切线段。

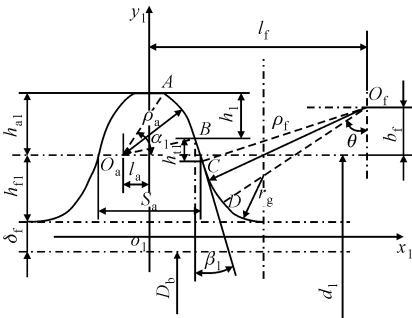


图 8 柔轮双圆弧齿形

2 齿形设计计算实例

2.1 齿形计算结果

本文中以 XB50 型谐波减速器为例进行齿形设计,其设计尺寸如下:模数  $m=0.25\text{ mm}$ ,柔轮齿数  $z_1=200$ ,刚轮齿数  $z_2=202$ ,径向变形系数 $\omega_0^*=1$ ,轴承外径  $D_b=50\text{ mm}$ ,齿根壁厚  $\delta_f=0.675\text{ mm}$ ,柔轮齿顶高系数  $h_{a1}^*=0.9$ ,柔轮齿根高系数  $h_{f1}^*=1.1$ ,刚轮齿顶高系数  $h_{a2}^*=0.9$ ,刚轮齿根高系数  $h_{f2}^*=1$ 。

为了说明双向共轭法与单向共轭法的区别,这里选用相同的参数分别计算,参数取值见表 1,单向共轭法需要先确定柔轮双圆弧齿形,而双向共轭法,简称双向法,不需要设置凹圆弧参数,减少所需设计

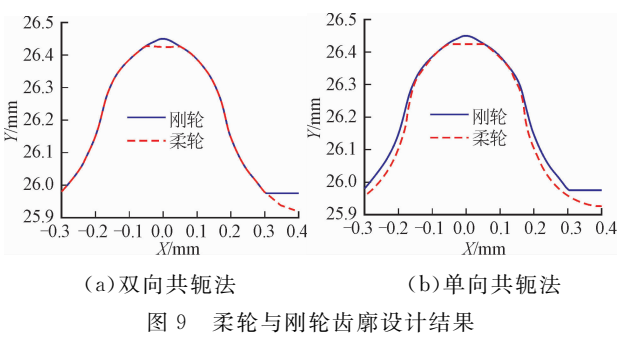
表 1 柔轮齿形设计参数取值

| 参数                    | 取值      |      |
|-----------------------|---------|------|
|                       | 单向法     | 双向法  |
| 节圆齿厚比 $K$             | 1.3     | 1.3  |
| 圆弧倾角 $\beta/(^\circ)$ | 7.5     | 7.5  |
| 凸圆弧工作齿高系数 $h_1^*$     | 0.76    | 0.76 |
| 凹圆弧半径系数 $\rho_f^*$    | 2.052 8 |      |
| 凹圆弧圆心偏移量系数 $l_f^*$    | 2.723 1 |      |

参数。

齿形参数计算结果见表 2,其中各参数如图 7、8 所示。表 2 中柔轮齿形参数在单向法中均通过经验方法选取<sup>[15]</sup>,而双向法中是通过共轭和拟合得到的。两种方法的刚轮齿廓基本相同,都是由柔轮凸圆弧段的共轭齿廓确定。在啮合最深处时啮合状态如图 9 所示。单向法得到的结果属于图 3b 的情况,齿根圆弧段没有参与啮合;而双向共轭法中柔轮与刚轮齿廓在整个工作齿高内都有较好的接触,而且柔轮齿根部更厚,有利于强度的提高。

| 表 2 齿形参数计算结果 mm |          |         |         |
|-----------------|----------|---------|---------|
| 参数              | 计算结果     |         |         |
|                 | 双向法      | 单向法     |         |
| 柔轮              | $\rho_a$ | 0.268 1 | 0.270 1 |
|                 | $l_a$    | 0.093 0 | 0.098 2 |
|                 | $h_{t1}$ | 0.154 1 | 0.189 8 |
|                 | $\rho_f$ | 0.463 8 | 0.513 2 |
|                 | $l_f$    | 0.639 0 | 0.680 8 |
|                 | $b_f$    | 0.097 5 | 0.084 0 |
|                 | $h_{t1}$ | 0.095 9 | 0.018 2 |
|                 | $S_a$    | 0.369 6 | 0.348 4 |
| 刚轮              | $\rho_p$ | 0.453 5 | 0.456 2 |
|                 | $l_p$    | 0.631 0 | 0.630 2 |
|                 | $b_p$    | 0.091 1 | 0.093 3 |
|                 | $\rho_q$ | 0.276 1 | 0.278 5 |
|                 | $l_q$    | 0.098 1 | 0.103 4 |
|                 | $b_q$    | 0.005 4 | 0.005 7 |
|                 | $h_{t2}$ | 0.090 0 | 0.088 0 |



## 2.2 双圆弧轮齿啮合侧隙分析

侧隙是评价谐波传动啮合状态的定量指标,可以用于判断轮齿干涉,分析齿间载荷分布<sup>[16]</sup>。本文所研究的侧隙定义为正常装配下、空载时柔轮齿廓与刚轮齿廓的周向间隙<sup>[14]</sup>。

两种方法的齿形计算结果在整个工作齿廓段的

侧隙分布如图 10 所示。从图 10 中可以看出,在整个啮合过程中侧隙大于 0,说明没有发生齿廓干涉,两种设计方法的结果都是合理的。以侧隙小于 0.003 mm 作为可能产生接触啮合条件<sup>[14]</sup>,双向法设计结果在参与啮合的齿廓长度最大为 0.53 mm,而单向法设计结果中参与啮合的齿廓长度最长为 0.22 mm,说明双向法设计齿廓接触段更长。

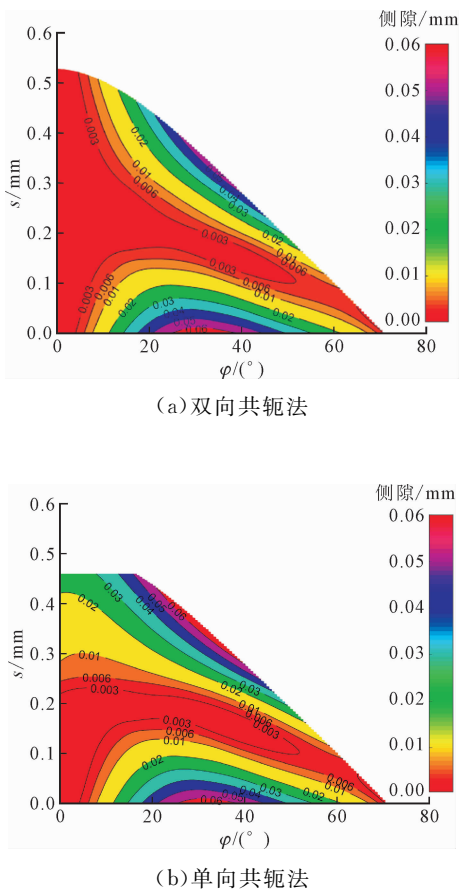


图 10 两种方法齿形计算结果的侧隙分布

能够产生啮合侧隙的位置角范围被称为啮合区。在某一位置角处,最小侧隙所在的齿廓点就是载荷作用下最先接触的点,即啮合点<sup>[7]</sup>。最小侧隙点位置提取如图 11 所示。双向共轭法在啮合区间 4°内时,啮合点在凹圆弧齿廓 CD 段上;在 4°~13.5°内啮合点在 BC 段;大于 13.5°区间时,啮合点在 AB 段。单向共轭法在整个啮合区内最小侧隙点都在凸圆弧段上。与单向共轭法相比,双向共轭法所设计的双圆弧齿形,实际参与啮合的齿廓范围较大,在传递相同的扭矩时啮合力将减小,有利于降低齿面磨损。

单一轮齿在啮合时有多个齿廓点同时发生接触被称为多点啮合现象。多点啮合可以增大齿廓接触

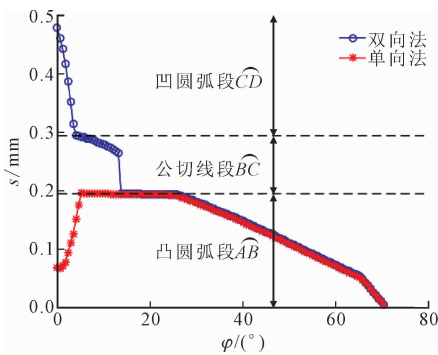


图 11 最小侧隙点位置

面,减小齿面应力,提高啮合刚度。为了分析双圆弧齿轮齿廓是否存在多点啮合状态,本文通过最小侧隙分布进行了分析。将 3 段齿廓各自的最小侧隙分布分别提取出来,如图 12 所示,在啮合区间  $3.5^{\circ} \sim 25.5^{\circ}$ ,双向法侧隙分布中有  $\widehat{BC}$  段与  $\widehat{CD}$  段、 $\widehat{BC}$  段与  $\widehat{AB}$  段两段重合部分,说明在啮合时处于这个区间内的轮齿有两个齿廓点同时发生接触。由于  $\widehat{CD}$  段和  $\widehat{BC}$  段在啮合最深处的侧隙很小,使得整个齿廓段都可以参与啮合。单向法侧隙结果中  $\widehat{BC}$  段和  $\widehat{CD}$  段的侧隙较大,实际中不参与啮合,也不存在多点啮合现象。

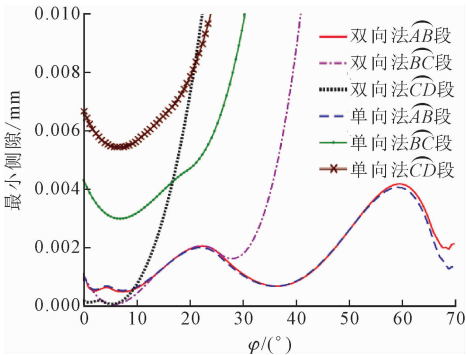
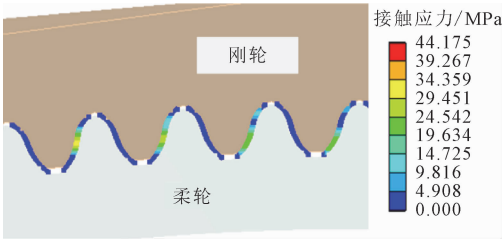


图 12 不同齿廓段的最小侧隙分布

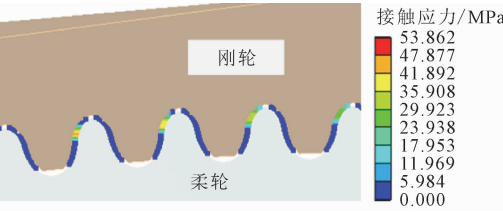
2.3 平面有限元接触分析

为了验证侧隙啮合分析结果,在有限元软件 Ansys 中建立谐波传动平面有限元模型。将波发生器简化为凸轮的等距曲线,刚轮和柔轮都简化为平面齿圈<sup>[17]</sup>。在柔轮齿廓和刚轮齿廓,柔轮与波发生器分别建立接触对。将刚轮和波发生器的位置固定,负载通过扭矩施加在柔轮内壁上。通过有限元接触仿真得到负载下齿廓的啮合情况。在  $40\text{ N}\cdot\text{m}$  负载下柔轮齿廓上的接触应力如图 13 所示。

图 13 中接触应力为 0,表示没有发生啮合接触,其他部分存在接触应力,说明该处齿廓点产生了啮合作用。从图 13 中可以看出,双向共轭法结果的



(a) 双向共轭法



(b) 单向共轭法

图 13 两种方法的齿廓接触应力

接触齿廓较长,并且有轮齿存在两段接触齿廓,验证了多点啮合现象。单向共轭法结果的接触点均在凸圆弧段。有限元接触分析的结果与侧隙分析结果一致。对比最大接触应力,双向共轭法结果为  $44.175\text{ MPa}$ ,单向共轭法结果为  $53.862\text{ MPa}$ ,说明通过增大接触面来减小齿面接触应力,从而减小齿面磨损是可行的。

3 结 论

本文通过平面啮合理论对谐波齿轮传动的双圆弧齿形设计方法进行了研究,得到以下结论。

(1)本文提出双向共轭设计方法,用于谐波齿轮传动的双圆弧齿形设计。与常用的单向共轭法相比,双向共轭法增加了从刚轮齿廓共轭计算柔轮齿廓的环节,解决了单向共轭法设计时刚轮凸圆弧段共轭齿廓不确定问题,并且减少了所需的设计参数。

(2)啮合侧隙分析结果表明,与单向共轭法相比,双向共轭法设计的双圆弧齿形参与啮合的齿廓段更长、三段齿廓都参与啮合,能够实现多点啮合,有利于减小啮合力、降低齿面磨损。

(3)平面有限元接触分析表明,与单向共轭法相比,双向共轭法设计的双圆弧齿形在负载下具有更大的齿廓接触面积和更小的齿面接触应力,有利于降低齿面磨损,进一步验证了侧隙分析的结论。

(4)本文提出的双向共轭设计方法不仅提升谐波齿轮传动双圆弧齿形设计效果,也为其他类型分段齿形设计提供了一种可以借鉴的设计思路。



## 参考文献:

- [1] MUSSER C W. Strain wave gearing: 2906143 [P/OL]. 1959-09-29[2019-05-08]. <https://patents.glgoo.top/patent/US2906143A/en>.
- [2] 沈允文. 论谐波齿轮传动的齿形 [J]. 齿轮, 1986, 10(4): 51-56.
- [3] ISHIKAWA S. Tooth profile of spline of strain wavegearing: 4823638 [P/OL]. 1989-04-25[2019-05-08]. <https://patents.glgoo.top/patent/US4823638A/en>.
- [4] 辛洪兵. 双圆弧谐波齿轮传动基本齿廓设计 [J]. 中国机械工程, 2011, 22(6): 656-662.  
XIN Hongbing. Design for basic rack of harmonic drive with double-circular-arc tooth profile [J]. China Mechanical Engineering, 2011, 22(6): 656-662.
- [5] 邹创, 陶涛, 姜歌东, 等. 考虑力学特性的谐波齿轮啮合参数优化方法 [J]. 西安交通大学学报, 2019, 53(2): 16-23.  
ZOU Chuang, TAO Tao, JIANG Gedong, et al. An optimization method for meshing parameters of harmonic drives considering mechanical characteristics [J]. Journal of Xi'an Jiaotong University, 2019, 53(2): 16-23.
- [6] 王家序, 袁攀, 谭春林, 等. 基于齿条近似法的谐波传动空间齿廓设计方法 [J]. 吉林大学学报(工学版), 2017, 47(4): 1121-1129.  
WANG Jiaxu, YUAN Pan, TAN Chunlin, et al. Spatial tooth profile design of harmonic drive by rack approximation method [J]. Journal of Jilin University (Engineering and Technology Edition), 2017, 47(4): 1121-1129.
- [7] 辛洪兵. 研究谐波齿轮传动啮合原理的一种新方法 [J]. 中国机械工程, 2002, 13(3): 181-183.  
XIN Hongbing. A new method for research on engagement principle of harmonic drive [J]. China Mechanical Engineering, 2002, 13(3): 181-183.
- [8] CHEN Xiaoxia, LIU Yusheng, XING Jingzhong, et al. The parametric design of double-circular-arc tooth profile and its influence on the functional backlash of harmonic drive [J]. Mechanism and Machine Theory, 2014, 73: 1-24.
- [9] 王家序, 周祥祥, 李俊阳, 等. 公切线式双圆弧齿廓谐波齿轮传动设计 [J]. 湖南大学学报(自然科学版), 2016, 43(2): 56-63.  
WANG Jiaxu, ZHOU Xiangxiang, LI Junyang, et al. Design of double-circular-arc and common tangent tooth profile of harmonic drive [J]. Journal of Hunan University (Natural Sciences), 2016, 43(2): 56-63.
- [10] 王家序, 袁攀, 李俊阳, 等. 基于不同啮合原理的谐波传动齿廓研究 [J]. 华中科技大学学报(自然科学版), 2017, 45(3): 58-64.  
WANG Jiaxu, YUAN Pan, LI Junyang, et al. Tooth profile research of harmonic drive based on different engagement theory [J]. Journal of Huazhong University of Science and Technology (Natural Science Edition), 2017, 45(3): 58-64.
- [11] 吴伟国, 于鹏飞, 侯月阳. 短筒柔轮谐波齿轮传动新设计新工艺与实验 [J]. 哈尔滨工业大学学报, 2014, 46(1): 40-46.  
WU Weiguo, YU Pengfei, HOU Yueyang. New design, new process of harmonic drive with short flexspline and its experiment [J]. Journal of Harbin Institute of Technology, 2014, 46(1): 40-46.
- [12] 陈晓霞, 宋宇, 邢静忠, 等. 连续共轭啮合的双圆弧谐波齿轮齿廓设计及运动仿真验证 [J]. 计算机辅助设计与图形学学报, 2016, 28(11): 1982-1988.  
CHEN Xiaoxia, SONG Yu, XING Jingzhong, et al. Double-circular-arc tooth profile design and movement simulation verification of harmonic drive with continuously conjugated transmission in entire engagement region [J]. Journal of Computer-Aided Design and Computer Graphics, 2016, 28(11): 1982-1988.
- [13] 杨勇, 王家序, 周青华, 等. 双圆弧谐波齿轮传动柔轮齿廓参数的优化设计 [J]. 四川大学学报(工程科学版), 2016, 48(1): 186-193.  
YANG Yong, WANG Jiaxu, ZHOU Qinghua, et al. Optimization design for flexspline tooth profile parameters of double-circular-arc harmonic drives [J]. Journal of Sichuan University (Engineering Science Edition), 2016, 48(1): 186-193.
- [14] 沈允文, 叶庆泰. 谐波齿轮传动的理论和设计 [M]. 北京: 机械工业出版社, 1985: 53-145.
- [15] 伊万诺夫. 谐波齿轮传动 [M]. 沈允文, 李克美, 译. 北京: 国防工业出版社, 1987: 75-79.
- [16] 陈晓霞, 杨朋朋, 邢静忠, 等. 谐波齿轮负载侧隙和啮合力分布规律研究 [J]. 西安交通大学学报, 2018, 52(7): 9-17.  
CHEN Xiaoxia, YANG Pengpeng, XING Jingzhong, et al. Research on distribution of loading backlash and meshing force of harmonic drive [J]. Journal of Xi'an Jiaotong University, 2018, 52(7): 9-17.
- [17] CHEN Yicheng, CHENG Yunhao, TSENG J T, et al. Study of a harmonic drive with involute profile flexspline by two-dimensional finite element analysis [J]. Engineering Computations, 2017, 34(7): 2107-2130.

(编辑 武红江)