

DOI: 10.7652/xjtuxb201907020

采用增广乘子法和模拟退火法的结构可靠性分析

高翔^{1,2}, 王林军^{1,2}, 杜义贤^{1,2}

(1. 三峡大学水电机械设备设计与维护湖北省重点实验室, 443002, 湖北宜昌;

2. 三峡大学机械与动力学院, 443002, 湖北宜昌)

摘要: 为避免一次二阶矩法的雅可比矩阵计算和罚函数法的罚因子选取,提出了一种采用增广乘子法和模拟退火法的结构可靠性分析方法。利用优化理论,以可靠指标最小为目标函数,以极限状态方程为等式约束条件,建立结构可靠性分析数学模型。采用增广乘子法将上述有约束优化模型变换为无约束优化模型,并用模拟退火法求解,从而避免了雅可比矩阵的计算以及初始罚因子的选取。采用一次二阶矩法、本文方法、蒙特卡罗模拟法分别对数值算例及悬臂梁工程算例进行了可靠性分析,结果表明:较一次二阶矩法,本文方法更接近于蒙特卡罗模拟法的结果,更精确;较蒙特卡罗模拟法,本文方法迭代次数较少,效率较高。

关键词: 一次二阶矩法;增广乘子法;模拟退火法;蒙特卡罗模拟法;悬臂梁

中图分类号: TB114.3 **文献标志码:** A **文章编号:** 0253-987X(2019)07-0144-09

Structure Reliability Analysis by Combining Augmented Multiplier Method and Simulated Annealing Algorithm

GAO Xiang^{1,2}, WANG Linjun^{1,2}, DU Yixian^{1,2}

(1. Hubei Key Laboratory of Hydroelectric Machinery Design and Maintenance, China Three Gorges University,

Yichang, Hubei 443002, China; 2. The College of Machinery and Power, China Three Gorges University,

Yichang, Hubei 443002, China)

Abstract: To simultaneously avoid calculation of Jacobian matrix of the first order second moment (FOSM) method and selection of the initial value regarding the penalty factor of the penalty function method, a structural reliability analysis method by combining augmented multiplier method with simulated annealing algorithm is proposed. Following optimization theory, the mathematical model is established, where the minimum reliability index is taken as objective function and the limit state equation as equality constraints. The constrained optimization problem is converted to unconstrained optimization problem with augmented multiplier method, and solved it by the simulated annealing algorithm, thus the calculation of Jacobian matrix and selection of the initial value of the penalty factor are meanwhile omitted. The proposed method, the FOSM method, and the Monte Carlo simulation (MCS) method are simultaneously applied to calculating the reliability index of a numerical example and a cantilever beam structure respectively. The result indicates that: the computational result of the proposed method is closer to that of MCS method, so it is more accurate than the FOSM; the iterations of the proposed method are fewer, so it is more effective than MCS method.

收稿日期: 2018-12-12。 作者简介: 高翔(1993—),男,硕士生;王林军(通信作者),男,副教授。 基金项目: 国家自然科学基金资助项目(51775308)。

网络出版时间: 2019-04-15

网络出版地址: <http://kns.cnki.net/kcms/detail/61.1069.T.20190411.1134.002.html>

Keywords: first order second moment method; augmented multiplier method; simulated annealing method; Monte Carlo simulation method; cantilever beam

在工程实际中,由于受材料属性、制造精度、安装误差等各种不确定因素的影响,结构的实际参数会偏离设计参数。为了在设计阶段有效度量及控制不确定因素对结构的影响,需要通过可靠性分析来预先评估结构的失效风险。

关于结构的可靠性分析,国内外很多学者都进行了积极地探索和研究。Dempster 和 Shafer 提出了证据理论,并且广泛应用于非概率结构可靠性分析及可靠性优化设计^[1-2]。Zadeh 等对基于元模型的多目标多学科优化结构设计进行了研究,提出了求解多学科优化设计(multi-disciplinary design optimization, MDO)问题的 EMOPSO 法,该方法类似于 MOPSO 法,引入了 SQP 法和元模型,从而做出了位于 Pareto 解处的模糊逻辑决策^[3]。Wang 等对基于非概率集合理论的多学科可靠性优化设计问题进行了研究,提出了一种基于 MDO 策略的单循环算法,并且指出 MDO 策略主要包括 MDF 法、CSSO 法、CO 法、BLISS 法^[4]。Hao 等对求解非概率可靠性优化设计问题的混沌控制方法进行了研究,提出了一种初期使用 HL-RF 法、振荡时使用 ECC 法进行迭代的方法,并使用混沌动力学理论加速可靠指标的收敛速度^[5]。为了提高 ECC 法的收敛性,在内层嵌套了 Wolfe-Powell 准则,用来检查以及更新控制因子^[5]。Hao 等对桁架结构的可靠性优化设计进行了研究,提出了一种高效的 IGA 法,并且通过 ESLA 法和 SSORASORM 法提高了 IGA 法的计算效率^[6]。Moon 等对实验数据不足情况下的基于信度的可靠性优化设计进行了研究,通过贝叶斯模型的核密度估计法计算概率密度函数,并由基于马尔可夫链蒙特卡罗取样器的 MH 算法计算后验分布,最终利用 Dirac δ 测度计算失效概率;由于 Hellinger 相似性的灵敏度不能用有限差分法计算,所以引入了复变量法;此外,指出 DKG 法是最准确的代理模型方法之一^[7]。杜秀云等对基于 Bregman 距离函数的可靠性分析进行了研究,引入 Bregman 距离函数来计算可靠指标 β ,根据不动点同伦映射的思想构造同伦方程组进行计算,对极限状态函数为非线性方程的可靠指标计算取得了良好的效果,尤其是极限状态函数为指数函数的情况^[8]。吉猛等对基于同伦分析的结构可靠性功能度量法进行了研究,使用 KKT 条件构造同伦方程组,并采用 β -cone

搜索方法追踪到最可能点(most probable point, MPP),且使用优于可靠指标法的功能度量法来分析可靠性^[9]。李彬等研究了基于改进自适应混沌控制的逆可靠性分析方法,运用自适应混沌控制方法进行了逆可靠性分析^[10]。黄晓旭等对基于主动学习 Kriging 模型和子集模拟的可靠性分析进行了研究,提出了 AK-SS 法,对具有隐式功能函数的小失效概率计算取得了良好的效果^[11]。孟增等对基于修正混沌控制的一次二阶矩(first order second moment, FOSM)法进行了研究,运用混沌理论对迭代震荡的情况进行修正,解决了极限状态函数非线性程度较高时的迭代振荡问题^[12]。

尽管 FOSM 法在结构可靠性分析方面的理论已经很成熟,然而在实际工程的结构可靠性分析中却很少使用,原因如下:①如果功能函数比较复杂,将会导致雅可比矩阵的计算变得烦琐,从而整个过程效率低下;②如果雅可比矩阵的条件数过大,将会导致结果误差较大;③通过极限状态方程求解雅可比矩阵的过程中涉及到单位换算,极易得到错误的雅可比矩阵,这将导致可靠指标及失效概率计算错误。因此,如何避免雅可比矩阵的求解成了一个亟待解决的问题。

将有约束模型转换为无约束模型的常用方法为罚函数法。内点罚函数法的罚因子逐步减小,常用于不等式约束;外点罚函数法的罚因子逐步增大,常用于等式约束。由于罚函数法是一种序列无约束极小化方法,所以收敛较慢,且两种罚函数法的收敛性均依赖于罚因子的初值^[13]。如果初始罚因子选取不当,就可能会导致两种罚函数法中构造的目标函数均不收敛。因此,如何避免罚函数法初始罚因子的选取成了一个亟待解决的问题。

针对以上两个技术难点,本文提出了一种采用增广乘子法与模拟退火法的结构可靠性分析方法,通过增广乘子法将等式约束优化模型转换为无约束优化模型,采用模拟退火法求解结构的可靠指标。此外,本文研究了各参数的不确定度对可靠指标的影响,并与 FOSM 法和蒙特卡罗模拟(Monte Carlo simulation, MCS)法进行了对比,数值算例和悬臂梁算例的结果表明,本文方法迭代次数比 MCS 法少,且所得结果比 FOSM 法更接近于 MCS 法。

1 可靠性理论

正态分布的概率密度函数 $f(x)$ 和累积分布函数 $F(x)$ 的公式^[14] 分别为

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} \exp\left[-\frac{(x-\mu_x)^2}{2\sigma_x^2}\right] \quad (1)$$

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} \int_{-\infty}^x \exp\left[-\frac{(x-\mu_x)^2}{2\sigma_x^2}\right] dx \quad (2)$$

式中 μ_x 和 σ_x 分别为变量 x 的均值和标准差。

拉科维茨·菲斯莱法可以实现正态分布到标准正态分布的转换,公式^[14] 为

$$y = (x - \mu_x) / \sigma_x \quad (3)$$

$$\mu_y = x - \phi^{-1}[F(x)]\sigma_x \quad (4)$$

$$\sigma_y = \varphi\{\phi^{-1}[F(x)]\} / f(x) \quad (5)$$

$$\varphi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) \quad (6)$$

$$\phi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^y \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt \quad (7)$$

式中: y 为转换后的 x ; μ_y 和 σ_y 分别为变量 y 的均值和标准差; $\varphi(y)$ 为 y 的概率密度函数; $\phi(y)$ 为 y 的累积分布函数; t 为积分变量。

误差函数 $\text{erf}(y)$ 和互补误差函数 $\text{erfc}(y)$ 的公式^[15] 分别为

$$\text{erf}(y) = \int_{-y}^y \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp(-t^2) dt = \int_0^y \frac{2}{\sqrt{\pi}} \exp(-t^2) dt \quad (8)$$

$$\text{erfc}(y) = 1 - \text{erf}(y) = \int_y^\infty \frac{2}{\sqrt{\pi}} \exp(-t^2) dt \quad (9)$$

引入误差函数后,累积分布函数 $\phi(y)$ 变为

$$\phi(y) = \frac{1 + \text{erf}(y/\sqrt{2})}{2} = \frac{\text{erfc}(-y/\sqrt{2})}{2} \quad (10)$$

可靠指标 β 和失效概率 P_f 的公式^[14] 分别为

$$\beta = (x - \mu_x) / \sigma_x = \mu_y / \sigma_y \quad (11)$$

$$P_f = 1 - \phi(\beta) = \int_{-\infty}^{-\beta} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) dy \quad (12)$$

变异系数 V 的公式^[14] 为

$$V = \sigma_x / \mu_x \quad (13)$$

由大数定理中的 Bernoulli 定理可知,进行 N 次模拟之后,若功能函数 $g(x) < 0$ 的次数为 n_f ,则直接抽样蒙特卡罗法的失效概率 P_f ^[14] 为

$$P_f = E\{I[g(x_u)]\} = \frac{\sum_{u=1}^N I[g(x_u)]}{N} \approx \frac{n_f}{N} \quad (14)$$

式中: x_u 为第 u 次模拟时的变量; $I[x]$ 为示性函数,

公式为

$$I[x] = \begin{cases} 1, & x < 0 \\ 0, & x \geq 0 \end{cases} \quad (15)$$

直接抽样蒙特卡罗法计算所得的失效概率方差 $\sigma_{P_f}^2$ 为

$$\sigma_{P_f}^2 = P_f(1 - P_f) / N \quad (16)$$

为提高直接抽样蒙特卡罗法的精度,将抽样中心改为 MPP。重要抽样蒙特卡罗法的失效概率 P_f ^[14] 为

$$P_f = E\left\{\frac{I[g(x_u)]f(x_u)}{f_{\text{MPP}}(x_u)}\right\} = \frac{1}{N} \sum_{u=1}^N \frac{I[g(x_u)]f(x_u)}{f_{\text{MPP}}(x_u)} \quad (17)$$

式中 $f_{\text{MPP}}(x)$ 表示将概率密度函数 $f(x)$ 中变量 x 的均值替换为 MPP 后的概率密度函数。

标准化正态空间中坐标原点到极限状态面的最短距离就是可靠指标 β ^[14],此时对应的极限状态面上的点就是 MPP^[14]。

重要抽样蒙特卡罗法计算所得的失效概率方差 $\sigma_{P_f}^2$ 为

$$\sigma_{P_f}^2 = \frac{1}{N} E\left\{\frac{I[g(x_u)]f^2(x_u)}{f_{\text{MPP}}^2(x_u)}\right\} - \frac{P_f^2}{N} = \frac{[\exp(\beta^2)\varphi(-2\beta) - P_f^2] / N}{N} \quad (18)$$

2 优化算法理论

2.1 等式约束的增广乘子法理论

根据可靠性理论,可建立优化模型为

$$\min M(\mathbf{X}) = \beta^2 = \sum_{v=1}^n [(X_v - \mu_v) / \sigma_v]^2$$

subject to $g_j(\mathbf{X}) = 0, j = 1, 2, \dots, m$ (19)

式中: M 为适应度; $\mathbf{X} = [X_1, X_2, \dots, X_n]$; μ_v 和 σ_v 分别为 X_v 的均值和标准差。

式(19)为具有 m 个等式约束 $g_j(\mathbf{X})$ 的模型,可以由增广乘子法转化为无约束优化模型,公式^[13] 为

$$\min M_\lambda(\mathbf{X}, r, \lambda) = M(\mathbf{X}) + \frac{r}{2} \sum_{j=1}^m [g_j(\mathbf{X})]^2 + \sum_{j=1}^m \lambda_j g_j(\mathbf{X}) \quad (20)$$

式中: M_λ 为无约束优化模型的适应度; r 为外罚函数法的罚因子; $\lambda = [\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m]$, 为拉格朗日乘子。式(20)右端第二项为惩罚项,第三项为乘子项。

使用增广乘子法时,并不要求罚因子趋于无穷大,只需取一个比较大的值或按照一定的比例递增^[14]。此方法同时应用于外点罚函数法及拉格朗日乘子法,避开了外罚函数法的初始罚因子选取。

2.2 模拟退火法理论

1983年,IBM公司的Kirkpatrick等提出了一种基于物理学正则系统的模拟退火法,该算法使用了辅助分布和多重马尔科夫链,且类似于吉布斯采样器^[16-18]。吉布斯分布又称玻尔兹曼分布,表达式为

$$P = \frac{1}{Z} \exp\left(-\frac{U(i)}{kT}\right) = \frac{1}{Z} \exp\left(-\frac{E(i)}{T}\right) \quad (21)$$

式中: i 为迭代次数; P 为概率; Z 为配分函数或正则化常数; $U(i)$ 为势能; k 为玻尔兹曼常数; T 为温度; $E(i)$ 为系统的能量。

Creutz在研究物理学的伊辛模型时,提出了基于微正则系统的微正则退火法,其配分函数^[18-19]为

$$Z = \sum_i \sum_{E_D} \Delta[E(i) + E_D - E_0] \quad (22)$$

式中: E_0 为初始能量值; E_D 为热系统中具有能量交换能力的“妖”(Demon)的能量,更新规则为

$$E_D^{(i+1)} = E_D^{(i)} + E^{(i)} - E^{(i+1)} \quad (23)$$

其中, $E_D^{(i)}$ 为第*i*次迭代时Demon的能量, $E^{(i)}$ 为第*i*次迭代时系统的能量,即目标函数值。

设 ΔE 为函数 $M_\lambda(\mathbf{X}, r, \lambda)$ 的变化量。当 $E_D^{(i)} > \Delta E$ 时,接受新解,并计算 $E_D^{(i+1)}$ 。如果 $E_D^{(i+1)} > E_{\max}^{(i+1)}$,则将 $E_{\max}^{(i+1)}$ 赋给 $E_D^{(i+1)}$ 。文献[18]指出: E_D 的初始值为0, $E_{\max}^{(i+1)} = \alpha E_{\max}^{(i)}$, $0 < \alpha < 1$ 。虽然文献[18]证实了微正则退火法算法优于模拟退火法,但并未给出初始能量值 E_0 的设定方法,所以本文无法采用。

式(21)中的温度 T 有很多种计算方法。经过查阅相关资料,收集了以下3种常见的第*i*次迭代时的温度 T_i 的计算方法。

(1)文献[17]指出,若目标函数值的标准差为 $\sigma_{f(x)}$,接受概率 $p > 3\sigma_{f(x)}$,则温度 T_i 为

$$T_i = -\frac{3\sigma_{f(x)}}{\ln p} \quad (24)$$

(2)文献[17]指出,为保证接受新解的概率大于设定值 a_0 ,应设定温度 T_i 为

$$T_i = \Delta^+ / \ln\left(\frac{m_1}{m_2}(a_0 - 1) + a_0\right) \quad (25)$$

式中: Δ^+ 为目标函数值上升的平均值; m_1 、 m_2 分别为先前实验中使目标函数下降、上升的解的数量。

(3)文献[20]指出,设定一个足够大的常数 γ ,使 γ 等于或者大于函数图形的深度,则温度 T_i 为

$$T_i = \frac{\gamma}{\ln(i+1)} \quad (26)$$

分析上述方法可知:方法(1)需要统计目标函数

值的标准差,比较烦琐;方法(2)需要设定初始概率值 a_0 ;方法(3)需要知道函数图像的深度。由于以上3种方法的参数设置均比较困难,所以本文没有采用。

模拟退火法利用 μ^{-1} 原理^[21]计算迭代步长,公式为

$$g_{\mu^{-1},v} = \frac{(1+\mu_0)^{|X_{\text{rand},v}|-1}}{\mu_0} \text{sgn}(X_{\text{rand},v}) \quad (27)$$

式中: $\mathbf{g}_{\mu^{-1}} = [g_{\mu^{-1},1}, g_{\mu^{-1},2}, \dots, g_{\mu^{-1},n}]$ 为计算迭代步长的中间变量; $\mu_0 = 10^{100\eta}$, $\eta = (i/i_{\max})^q$, q 为退火因子,必须大于0, q 越大则退火速度越快^[21];变量 $\mathbf{X}_{\text{rand}} = [X_{\text{rand},1}, X_{\text{rand},2}, \dots, X_{\text{rand},n}]$ 与变量 $\mathbf{X}$ 的元素数量相同,且所有元素均是位于 $[-1, 1]$ 内的随机数; sgn 为符号函数。

模拟退火法利用Metropolis准则^[13]来判断是否接受新解,Metropolis准则为:当适应度的变化 $\Delta M_\lambda < 0$ 或随机数 p 满足一定的条件时,接受新解。 p 需要满足的具体条件为

$$p < \exp\left(-\frac{\eta \Delta M_\lambda}{\epsilon (|M_\lambda| + \epsilon_0)}\right) \quad (28)$$

式中: ϵ 是算法的精度; ϵ_0 是极小数常量,分母加上 ϵ_0 是为了防止分母为零。在MATLAB软件中, p 由RAND函数生成, ϵ_0 由eps函数生成。

为避免式(28)中的指数函数计算,文献[22]提出了Demon算法,具体如下:若 $\Delta E \leq D$,则接受新解,同时更新Demon值 D ,即 $D = D - \Delta E$ 。但是,文献[22]提出的Demon算法的初始Demon值如何设置,文献[17]中并未记载,故本文未采用。

采用模拟退火法求解无约束优化问题的步骤如下。

步骤1 初始化 $\mathbf{X}$,并求出函数 M_λ 的函数值。

步骤2 开始迭代,设*i*为迭代次数。

步骤3 对每个 X_v ,计算迭代步长 $dX_v = g_{\mu^{-1},v} \cdot (B_{u,v} - B_{l,v})$,式中 $B_{u,v}$ 和 $B_{l,v}$ 分别为变量 X_v 的上下界。

步骤4 通过迭代步长求得新解 $\mathbf{X}' = \mathbf{X} + d\mathbf{X}$,如果 $\mathbf{X}'$ 不在范围内则随机赋予新值。

步骤5 首先求函数的变化值 ΔM_λ ,然后根据Metropolis准则选择是否接受新解。

步骤6 保留适应度最小的解。

步骤7 判断是否达到循环终止条件。当*i*小于迭代上限 $i_{\max}$ 时,返回步骤2;当*i*达到 $i_{\max}$ 时,循环终止。

文献[23]指出,为了在后期能够跳出局部最优

解,有学者提出了在后期提高温度(即回火)的回火退火法,也有学者提出反复执行退火降温 and 回火升温的计算方法。若采用文献[23]的回火退火法,则式(28)变为

$$p < 1 - \frac{\eta \Delta M_{\lambda}}{\varepsilon(|M_{\lambda}| + \varepsilon_0)} \quad (29)$$

本文将文献[13]的增广乘法与文献[13,21]的模拟退火法和文献[23]的回火退火法结合,并将其应用于可靠指标的计算,分析结构的可靠性,本文方法的流程图如图 1 所示。

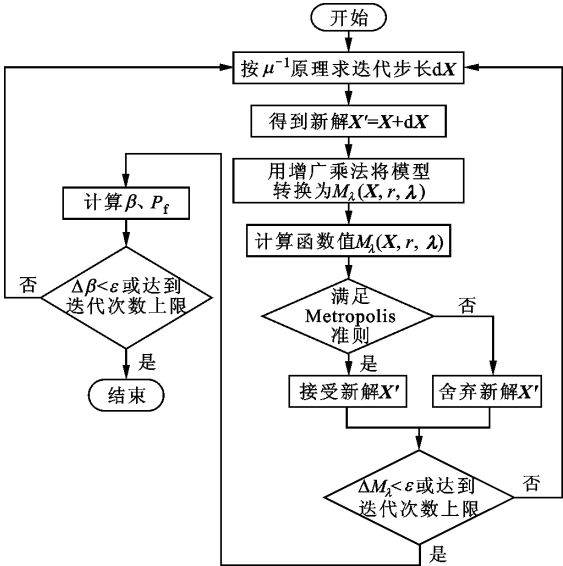


图 1 本文算法的流程图

3 数值算例分析

设变量 $\mathbf{X}=[X_1, X_2]$ 服从正态分布, X_1 和 X_2 均值分别为 10 和 2.5, 标准差分别为 2 和 0.375, 某个结构的功能函数 $g(\mathbf{X})$ 为

$$g(\mathbf{X}) = 18.46 - 7.48X_1X_2^{-3} \quad (30)$$

设算法的终止条件为 $\|\mathbf{X}^{(i)} - \mathbf{X}_0\| / \|\mathbf{X}_0\| \leq 1 \times 10^{-6}$, $\mathbf{X}_0$ 为最优解, $\mathbf{X}^{(i)}$ 为第 i 次迭代时的解。分别采用设计点法、JC 法和简化加权分位值法 3 种 FOSM 法^[14]求解此问题, 所得结果如下。

(1) 3 种方法的迭代次数均为 12 次, 且功能函数 g 均等于 8.6899×10^{-12} 。

(2) 3 种方法所得可靠性参数几乎相同, MPP 约等于 (11.185 490, 1.654 912), 可靠指标 $\beta \approx 2.330\ 217$, 失效概率 $P_f \approx 0.009\ 897$ 。

(3) 设计点法和 JC 法所得失效概率相同, 而简化加权分位值法的失效概率略小。文献[14]指出, 简化加权分位值法的精度低于 JC 法, 但是此次的计算结果表明, 简化加权分位值法与 JC 法的失效

概率误差仅为 1×10^{-17} 。

取退火因子 $q=1$, M_0 为当前函数值, M_v 为最优函数值, 设 $|M_0 - M_v| < 1 \times 10^{-6}$ 或迭代次数小于等于 12 作为终止条件。本文方法迭代 4 次得: MPP 为 (11.746 19, 1.683 011), $g=0.029\ 489$, $\beta=2.348\ 96$, $P_f=0.009\ 413$ 。

设计点法、JC 法和简化加权分位值法 3 种 FOSM 法所得的可靠指标 $\beta=2.330\ 217$, 本文所得可靠指标 $\beta=2.348\ 96$ 。两种方法的可靠指标几乎相同, 证明本文方法可行。

经过 1×10^7 次模拟, 直接抽样蒙特卡罗法求得参数如下: $\beta=2.346\ 2$, $P_f=0.009\ 5$, $\sigma_{P_f}=3.064\ 7 \times 10^{-5}$ 。

设重要抽样蒙特卡罗法的抽样中心为设计点 (11.185 5, 1.654 9), 经过 1×10^7 次模拟, 重要抽样蒙特卡罗法求得参数如下: $\beta=2.344\ 3$, $P_f=0.009\ 5$, $\sigma_{P_f}=4.942\ 0 \times 10^{-6}$ 。由此可见, 与直接抽样蒙特卡罗法相比, 在模拟次数相同时, 重要抽样蒙特卡罗法的失效概率标准差 σ_{P_f} 明显偏小, 说明重要抽样蒙特卡罗法的改进效果较好。

将 FOSM 法、MCS 法和本文方法的计算量和计算结果进行对比, 结果见表 1 和表 2, 其中, FOSM 法取 JC 法的数据, MCS 法取重要抽样蒙特卡罗法的数据。

表 1 数值算例下 FOSM 法、MCS 法和本文方法的计算量

方法	内层迭代次数	外层迭代次数	函数调用次数	雅可比矩阵调用次数	函数计算次数
FOSM 法	0	12	12	12	36
MCS 法	0	1×10^7	1×10^7	0	1×10^7
本文方法	1 500	4	6 000	0	6 000

表 2 数值算例下 FOSM 法、MCS 法和本文方法的计算结果

方法	可靠指标	失效概率
FOSM 法	2.33	0.009 9
MCS 法	2.344 3	0.009 5
本文方法	2.349	0.009 4

由表 1 和表 2 可以看出: 本文方法的迭代次数少于 MCS 法, 计算结果比 FOSM 法更接近 MCS 法。由此可得出, 本文方法比 MCS 法效率更高, 比 FOSM 法更精确。

在不同确定度下, X_1 、 X_2 的均值 μ_{X_1} 、 μ_{X_2} 以及标准差 σ_{X_1} 、 σ_{X_2} 会有不同的变化范围,此时通过本文方法计算得到的对应可靠指标 β 也会有不同的变化

范围和不确定度。不同不确定度下的 μ_{X_1} 、 μ_{X_2} 、 σ_{X_1} 、 σ_{X_2} 、 β 的变化范围以及 β 的不确定度如表 3 和表 4 所示。

表 3 不同均值不确定度下 μ_{X_1} 、 μ_{X_2} 、 β 的变化范围及 β 的不确定度

均值的不确定度/%	μ_{X_1} 的变化范围	μ_{X_2} 的变化范围	β 的变化范围	β 的不确定度/%
2	[9.98,10.02]	[2.45,2.55]	[2.203 7,2.456 8]	10.86
4	[9.96,10.04]	[2.40,2.60]	[2.077 5,2.594 6]	22.14
6	[9.94,10.06]	[2.35,2.65]	[1.953 4,2.711 1]	32.49
8	[9.92,10.08]	[2.30,2.70]	[1.825 7,2.836 0]	43.34

表 4 不同标准差不确定度下 σ_{X_1} 、 σ_{X_2} 、 β 的变化范围及 β 的不确定度

标准差的不确定度/%	σ_{X_1} 的变化范围	σ_{X_2} 的变化范围	β 的变化范围	β 的不确定度/%
5	[1.90,2.10]	[0.356 2,0.393 8]	[2.456 1,2.219 6]	10.12
10	[1.80,2.20]	[0.337 5,0.412 5]	[2.588 8,2.119 0]	19.96
15	[1.70,2.30]	[0.318 7,0.431 2]	[2.742 3,2.026 7]	30.01
20	[1.60,2.40]	[0.300 0,0.450 0]	[2.918 5,1.944 3]	40.07

由表 3 和表 4 可知均值和标准差的不确定度与 β 的不确定度之间的关系,如图 2 所示。

别呈现线性关系;

(3)均值的确定度为 8%时, β 的不确定度为 43.34%,标准差的确定度为 20%时, β 的不确定度为 40.07%,证明均值对 β 的影响比标准差对 β 的影响大一倍。

4 悬臂梁的可靠性分析

悬臂梁^[24]长度为 L ,矩形横截面的宽和高分别为 b 和 h 。悬臂梁末端承受的水平载荷和竖直载荷分别为 P_h 、 P_v ,末端许可挠度 $[\omega]=3\text{ mm}$ 。悬臂梁的材料为 45 号钢,弹性模量 $E=210\text{ GPa}$,屈服极限 $\sigma_s=350\text{ MPa}$ 。此时,变量 $\mathbf{X}=[b,h,L,P_h,P_v]$ 。

设宽度 $b/\text{mm} \sim N(100,5^2)$,高度 $h/\text{mm} \sim N(200,5^2)$, $P_h/\text{kN} \in [45,75]$, $P_v/\text{kN} \in [22,28]$ 。长度 L 的均值为 $1\,000\text{ mm}$,变异系数 $V=0.01$,由式(13)可知 $L/\text{mm} \sim N(1\,000,10^2)$ 。根据正态分布的 3σ 准则可知, $P_h/\text{kN} \sim N(60,5^2)$, $P_v/\text{kN} \sim N(25,1^2)$ 。

4.1 考虑挠度失效的可靠性分析

矩形截面的梁弯曲变形时,横截面对中性轴的惯性矩 I_z 为

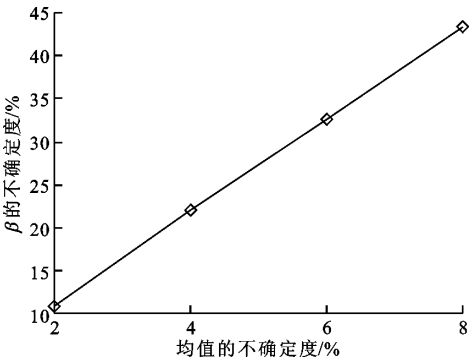
$$I_z = \frac{bh^3}{12}$$

(31)

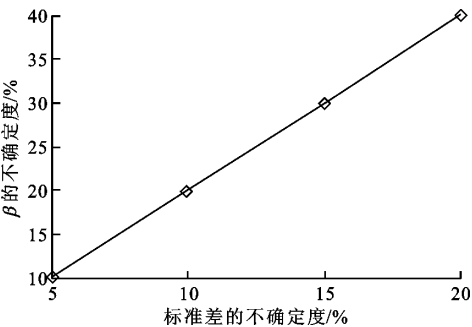
当悬臂梁的一端承受集中力 P_v 时,最大挠度 $\omega_{\max}$ 为

$$\omega_{\max} = -\frac{P_v L^3}{3EI_z} = -\frac{P_v L^3}{3E} \frac{12}{bh^3} = -\frac{4P_v L^3}{Eb h^3}$$

(32)



(a)均值的确定度与 β 的不确定度的关系



(b)标准差的确定度与 β 的不确定度的关系

图 2 均值和标准差的确定度与 β 的不确定度的关系

对表 3、表 4、图 2 进行分析,可得如下结论:

- (1) β 与均值呈正比关系,与标准差呈反比关系;
- (2) β 的不确定度与均值、标准差的确定度分

所以,当悬臂梁的一端承受 P_h 、 P_v 两个集中载荷时,产生的最大挠度为

$$\omega_{\max} = \sqrt{\left(\frac{4P_hL^3}{Ehb^3}\right)^2 + \left(\frac{4P_vL^3}{Ebh^3}\right)^2} \quad (33)$$

考虑挠度失效时,功能函数 g_1 为

$$g_1(\mathbf{X}) = [\omega] - \frac{4L^3}{Ebh} \sqrt{\left(\frac{P_v}{h^2}\right)^2 + \left(\frac{P_h}{b^2}\right)^2} \quad (34)$$

由于此功能函数比较复杂,求导烦琐,雅可比矩阵较难获取,此处不再与 FOSM 法进行对比。

经过 50 次迭代,本文方法求得参数如下:MPP 为 (111.27, 202.32, 994.48, 51.34, 25.01), $g_1 = -0.488\ 3$, $\beta = 3.303\ 6$, $P_f = 4.77 \times 10^{-4}$ 。求解过程中 β 和 P_f 的变化如图 3 所示。

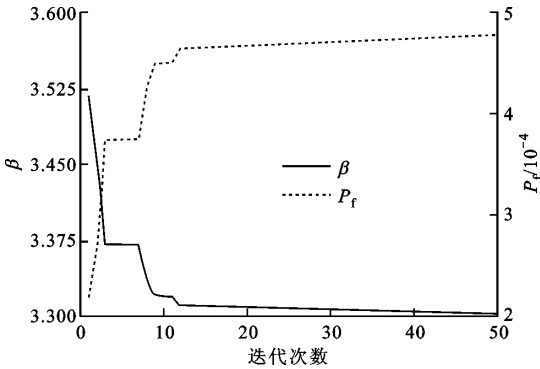


图 3 挠度失效求解过程中 β 和 P_f 的变化

由图 3 可知,本文方法在前 10 次迭代中收敛较快,而在后 40 次迭代中收敛较慢。

4.2 考虑应力失效的可靠性分析

矩形截面的梁弯曲变形时,梁的抗弯截面系数 W_z 为

$$W_z = \frac{I_z}{y_{\max}} = \frac{bh^3/12}{h/2} = \frac{bh^2}{6} \quad (35)$$

式中 $y_{\max}$ 为悬臂梁中性层到横截面两端的最大距离。

当悬臂梁一端承受 P_h 、 P_v 两个集中载荷时,矩形截面上产生的最大应力 $\sigma_{\max}$ 为

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_z} = \frac{P_hL}{hb^2/6} + \frac{P_vL}{bh^2/6} \quad (36)$$

考虑应力失效时,功能函数 g_2 为

$$g_2(\mathbf{X}) = \sigma_s - \frac{6P_hL}{hb^2} - \frac{6P_vL}{bh^2} \quad (37)$$

经过 1 000 次迭代,JC 法求得参数如下:MPP 为 (84.97, 195.93, 100 2.76, 60.0, 25.0), $g_2 = 48.756\ 6$, $\beta = 3.126\ 1$, $P_f = 8.857\ 2 \times 10^{-4}$ 。

经过 500 次迭代,本文方法求得参数如下:MPP 为 (85.4, 192.9, 100 4.0, 70.7, 25.0), $g_2 = -0.024\ 0$, $\beta = 3.904\ 1$, $P_f = 4.728\ 8 \times 10^{-5}$ 。求解

过程中 β 和 P_f 的变化如图 4 所示。

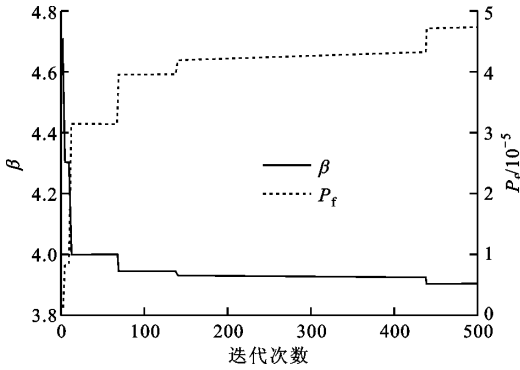


图 4 应力失效求解过程中 β 和 P_f 的变化

由图 4 可知,本文方法在前 70 次迭代中收敛较快,而在后 430 次迭代中收敛较慢。

采用式(28)的模拟退火法及式(29)的回火退火法计算可靠指标,分别运行 6 次后得到两组结果,分别为:3.896 6、3.920 5、3.983 8、3.911 4、3.931 4、3.949 6,以及 3.914 0、3.988 3、3.916 4、3.955 7、3.952 9、3.889 2。可靠指标的统计参数见表 5。

表 5 可靠指标的统计参数

方法	算术平均值	标准差	极差
模拟退火法	3.932 2	0.031 0	0.087 2
回火退火法	3.936 1	0.036 0	0.099 1

分析表 5 可知,在相同的迭代次数下,回火退火法的算术平均值、标准差和极差都较大,回火退火法的改进效果较差。这是因为回火退火法虽然提高了全局搜索能力,但是牺牲了局部搜索能力。如果将其应用于强欺骗性、多模态、多漏斗的函数,情况可能相反。

经过 1×10^7 次模拟,直接抽样蒙特卡罗法求得参数如下: $\beta = 3.828\ 0$, $P_f = 6.460\ 0 \times 10^{-5}$, $\sigma_{P_f} = 2.541\ 6 \times 10^{-6}$ 。

设重要抽样蒙特卡罗法的抽样中心为设计点 (84.97, 195.93, 1 002.7, 60, 25), 经过 1×10^7 次模拟,重要抽样蒙特卡罗法求得参数如下: $\beta = 3.835\ 4$, $P_f = 6.267\ 7 \times 10^{-5}$, $\sigma_{P_f} = 4.120\ 8 \times 10^{-8}$ 。与直接抽样蒙特卡罗法相比,在模拟次数相同时,重要抽样法的失效概率标准差 σ_{P_f} 明显偏小,说明重要抽样蒙特卡罗法的改进效果较好。

FOSM 法、MCS 法和本文方法的计算量见表 6,计算结果见表 7。

分析表 6 和表 7 可知,本文方法的迭代次数比 MCS 法更少,所以本文方法比 MCS 法效率更高。

FOSM 法的失效概率与 MCS 法相比相差一个数量级,误差非常大,而本文算法的失效概率 4.8×10^{-5} 更接近 MCS 法的失效概率 6.3×10^{-5} ,说明本文方法比 FOSM 法更精确。由于本文方法和 MCS 法都不需要计算雅可比矩阵,所以 FOSM 法的结果误差较大极有可能是由于雅可比矩阵条件数过大导致的。

表 6 悬梁臂可靠性分析时 FOSM 法、MCS 法和本文方法的计算量

方法	内层迭代次数	外层迭代次数	函数调用次数	雅可比矩阵调用次数	函数计算次数
FOSM 法	0	1 000	1 000	1 000	6×10^3
MCS 法	0	1×10^7	1×10^7	0	1×10^7
本文方法	1 500	500	7.5×10^5	0	7.5×10^5

表 7 悬梁臂可靠性分析时 FOSM 法、MCS 法和本文方法的计算结果

方法	可靠指标	失效概率
FOSM 法	3.126 1	8.86×10^{-4}
MCS 法	3.835 4	6.3×10^{-5}
本文方法	3.9	4.8×10^{-5}

根据考虑挠度和应力失效的双失效模式系统的迭代结果可知,挠度的失效概率比应力大,且双失效模式的串联系统的失效概率 $P_f=5.24\times10^{-4}$ 。

4.3 均值的不确定度对可靠指标的影响

改变均值的不确定度,并保持标准差不变,本文方法所得的可靠指标及可靠指标的不确定度见表 8。

表 8 不同均值不确定度下的可靠指标及可靠指标的不确定度

均值的不确定度/%	失效类型	可靠指标	可靠指标的不确定度/%
2	挠度	[3.251 5,3.354 7]	3.12
	应力	[3.648 7,4.192 8]	13.88
4	挠度	[3.201 1,3.407 9]	6.26
	应力	[3.414 1,4.542 5]	28.36
6	挠度	[3.154 7,3.457 9]	9.17
	应力	[3.207 7,4.983 3]	43.35
8	挠度	[3.094 5,3.504 4]	12.42
	应力	[3.060 6,5.593 4]	58.53

由表 8 可知均值的不确定度与挠度失效和应力失效可靠指标的不确定度之间的对应关系,如图 5 所示。

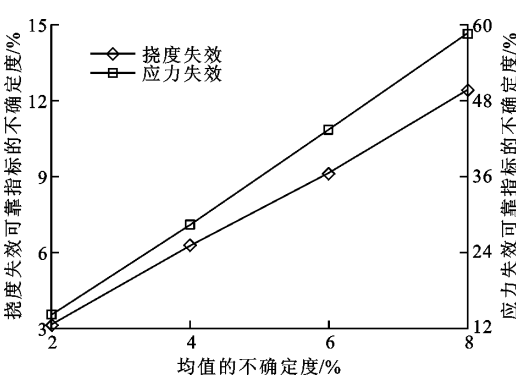


图 5 可靠指标受均值不确定度的影响

由表 8 和图 5 可以看出:

- (1)在均值不确定度为 2% 时,挠度失效可靠指标的不确定度为 3.12%,应力失效可靠指标的不确定度为 13.88%,挠度与应力可靠指标的不确定度分别呈 1.5 倍和 6 倍的关系;
- (2)观察其他均值不确定度的情况可看出,挠度与应力可靠指标的不确定度分别呈线性关系,而且分别呈近似 1.5 倍和 5 倍的关系;
- (3)均值的不确定度对应力的影响是对挠度的影响的 4~5 倍。

5 结 论

- (1)FOSM 法需要计算雅可比矩阵,而病态的雅可比矩阵会导致计算结果误差大大增加。分析悬臂梁应力失效时,FOSM 法的结果异于 MCS 法和本文方法,这极有可能是由雅可比矩阵为病态矩阵引起的。
- (2)传统的罚函数法的收敛性依赖于罚因子初始值的选取,而本文方法的收敛性并不依赖于拉格朗日乘子和罚因子的初始值。本文采用增广乘子法将有约束优化模型转换成无约束优化问题,成功避免了罚因子初始值的选取。
- (3)本文方法的迭代次数介于 FOSM 法和 MCS 法之间,且结果更接近于 MCS 法。本文方法有望拓展到具有多个极限状态方程的多学科可靠性分析及优化问题中。

参考文献:

[1] DEMPSTER A P. Upper and lower probabilities induced by a multi-valued mapping [J]. Annual Mathematical Statist, 1967, 38(4): 325-339.

[2] SHAFER G. A mathematical theory of evidence [M]. Princeton, NJ, USA: Princeton University Press, 1976: 10-50.

- [3] ZADEH P M, SAYADI M, KOSARI A. An efficient metamodel-based multi-objective multidisciplinary design optimization framework [J]. *Applied Soft Computing Journal*, 2019, 74: 760-782.
- [4] WANG X J, WANG R X, WANG L, et al. An efficient single-loop strategy for reliability-based multidisciplinary design optimization under non-probabilistic set theory design optimization framework [J]. *Aerospace Science and Technology*, 2018, 73: 148-163.
- [5] HAO P, WANG Y T, LIU C, et al. A novel non-probabilistic reliability-based design optimization algorithm using enhanced chaos control method [J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2017, 318: 572-593.
- [6] HAO P, WANG Y T, MA R, et al. A new reliability-based design optimization framework using isogeometric analysis [J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2019, 345: 476-501.
- [7] MOON M Y, CHOI K K, CHO H, et al. Reliability-based design optimization using confidence-based model validation for insufficient experimental data [J]. *Journal of Mechanical Design*, 2017, 139: 031404.
- [8] 杜秀云, 薛齐文, 刘旭东. 基于 Bregman 距离函数的可靠性分析 [J]. *应用数学和力学*, 2016, 37(6): 509-616.
DU Xiuyun, XUE Qiwen, LIU Xudong. Reliability analysis based on Bregman distances [J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2016, 37(6): 509-616.
- [9] 吉猛, 姜潮, 韩硕. 一种基于同伦分析的结构可靠性功能度量法 [J]. *计算力学学报*, 2015, 32(2): 149-153.
JI Meng, JIANG Chao, HAN Shuo. An performance measure approach of structural reliability based on homotopy analysis [J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2015, 32(2): 149-153.
- [10] 李彬, 郝鹏, 孟增, 等. 基于改进自适应混沌控制的逆可靠度分析方法 [J]. *应用数学和力学*, 2017, 38(9): 979-987.
LI Bin, HAO Peng, MENG Zeng, et al. An improved adaptive chaos control method for inverse reliability analysis [J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2017, 38(9): 979-987.
- [11] 黄晓旭, 陈建桥. 基于主动学习 Kriging 模型和子集模拟的可靠度分析 [J]. *应用力学学报*, 2016, 33(5): 866-871.
HUANG Xiaoxu, CHEN Jianqiao. Reliability analysis based on active learning Kriging model and subset simulation method [J]. *Chinese Journal of Applied Mechanics*, 2016, 33(5): 866-871.
- [12] 孟增, 李刚. 基于修正混沌控制的一次二阶矩可靠度算法 [J]. *工程力学*, 2015, 32(12): 21-26.
MENG Zeng, LI Gang. Modified chaos control-based first order second moment reliability method [J]. *Engineering Mechanics*, 2015, 32(12): 21-26.
- [13] 张永恒. 工程优化设计与 MATLAB 实现 [M]. 修订版. 北京: 清华大学出版社, 2011: 162-164, 204-208.
- [14] 张明, 金峰. 结构可靠度计算 [M]. 北京: 科学出版社, 2015: 8-55, 189-208.
- [15] 张善杰, 金建铭. 特殊函数计算手册 [M]. 南京: 南京大学出版社, 2011: 348-349.
- [16] 刘军. 科学计算中的蒙特卡罗策略 [M]. 唐年胜, 周勇, 徐亮, 译. 北京: 高等教育出版社, 2009: 5-6.
- [17] 赵秋红, 肖依永, Mladenovic N. 基于单点搜索的元启发式算法 [M]. 北京: 科学出版社, 2013: 58-63.
- [18] 徐俊杰. 元启发式优化算法: 理论阐释与应用 [M]. 合肥: 中国科学技术大学出版社, 2015: 65-67.
- [19] CREUTZ M. Microcanonical Monte Carlo simulation [J]. *Physical Review Letters*, 1983, 50(19): 1411-1414.
- [20] HAJEK B. Cooling schedules for optimal annealing [J]. *Mathematics of Operations Research*, 1988, 13(2): 311-329.
- [21] 王正林, 龚纯, 何倩. 精通 MATLAB 科学计算 [M]. 北京: 电子工业出版社, 2012: 406-408.
- [22] SCHNEIDER J, DANKESREITER M, FETTES W, et al. Search-space smoothing for combinatorial optimization problems [J]. *Physica: A Statistical Mechanics and Its Applications*, 1997, 243: 77-112.
- [23] 刘晓莹. 基于改进模拟退火算法的给水管网改扩建优化规划 [D]. 合肥: 合肥工业大学, 2009: 26-27.
- [24] 侯作富, 胡述龙, 张新红. 材料力学 [M]. 武汉: 武汉理工大学出版社, 2012: 109-136.

(编辑 陶晴)