

DOI: 10.7652/xjtuxb201807002

谐波齿轮负载侧隙和啮合力分布规律研究

陈晓霞^{1,2}, 杨朋朋², 邢静忠², 姚云鹏²

(1. 天津工业大学天津市现代机电装备技术重点实验室, 300387, 天津;

2. 天津工业大学机械工程学院, 300387, 天津)

摘要: 为更真实地反映负载工况下谐波齿轮的啮合特性,提出了一种基于空载侧隙和周向线性啮合刚度的理论迭代算法,用于计算随负载变化的负载侧隙和啮合力分布。利用精确算法计算了装配状态下的空载侧隙;建立了三维实体单元的柔轮有限元模型,在柔轮齿上逐一施加啮合力,利用接触分析求解了双圆盘波发生器作用下反映柔轮齿廓啮合点周向刚度特性的啮合刚度矩阵;根据装配状态下的空载侧隙,迭代计算了在逐步增大的刚轮转动位移下的负载侧隙、啮合力及负载扭矩。由于理论算法无法考虑啮合刚度的非线性影响,为验证本文算法,利用有限元非线性接触分析方法,通过定义齿廓间的接触关系,数值求解了负载侧隙和啮合力。对比研究表明:在额定工况下,理论算法给出的啮合力分布与有限元分析结果基本吻合,但当负载较大时,理论算法的啮合刚度偏大,造成啮合力幅值偏高。

关键词: 谐波齿轮传动;啮合刚度;啮合力;负载侧隙;非线性接触分析

中图分类号: TH132.43 **文献标志码:** A **文章编号:** 0253-987X(2018)07-0009-09

Research on Distribution of Loading Backlash and Meshing Force of Harmonic Drive

CHEN Xiaoxia^{1,2}, YANG Pengpeng², XING Jingzhong², YAO Yunpeng²

(1. Tianjin Key Laboratory of Modern Mechatronics Equipment Technology, Tianjin Polytechnic University, Tianjin 300387, China; 2. School of Mechanical Engineering, Tianjin Polytechnic University, Tianjin 300387, China)

Abstract: To investigate the meshing behavior of harmonic drives under transmission load, an iterative algorithm to calculate the distribution of meshing forces and loading backlashes under varied transmission torques is presented based on linear circumferential meshing stiffness and initial backlash. The initial backlash is calculated in assembly state with an exact algorithm. A 3D finite element model of the flexspline with solid elements is built under the action of a two-disk wave generator, and the meshing stiffness matrix which reflects the circumferential stiffness characteristics of the engaged point on flexspline tooth is calculated by contact analysis under the meshing forces applied on each meshing point. The meshing forces, loading backlashes and transmission torques at gradually increased rotational displacements are iteratively calculated according to the initial backlash in assembly state. Because the effect of non-linear meshing stiffness is neglected in the theoretical method, the contact relationship between tooth profiles is defined with non-linear contact analysis of finite element method. And the loading backlashes and

收稿日期: 2017-12-18。 作者简介: 陈晓霞(1969—),女,副教授,博士生导师。 基金项目: 国家自然科学基金资助项目(51575390);天津市高等学校科技发展基金资助项目(20130903);天津市应用基础与前沿技术研究计划重点资助项目(18JCZDJC39000)。

网络出版时间: 2018-04-25

网络出版地址: <http://kns.cnki.net/kcms/detail/61.1069.T.20180425.1433.002.html>

meshing forces are calculated in order to verify the iterative algorithm. Comparative studies show that the meshing force distribution obtained by this iterative algorithm is basically consistent with that by the finite element model, but the meshing force amplitude is higher when the load torque is large because bigger stiffness is used in the iterative algorithm.

Keywords: harmonic drive; meshing stiffness; meshing force; loading backlash; non-linear contact analysis

谐波齿轮传动凭借其传动比大、体积小、结构简单、重量轻、承载能力大和传动精度高等优点,被广泛应用于航天航空、工业机器人、精密机床、仪器仪表等领域^[1]。随着机器人技术的迅猛发展,在未来5年,谐波减速器将在高精度、高承载能力等相关技术方面大力发展^[2]。目前,指导和评价谐波齿轮齿廓设计的几何学指标为空载侧隙及影响回差的背隙^[3-4],目的是为了保障传动运动的精度。对于负载工况下的谐波齿轮传动,齿间啮合力既是柔轮强度计算的基础,同时又对定位精度和动态稳定性等啮合性能有重要影响。

随着计算技术的发展,很多研究者通过建立等厚度壳体的柔轮有限元模型,计算了空载状态下柔轮的结构应力和变形^[5-6]。伊万诺夫依据实验数据,给出了齿间啮合力分布的经验公式^[1]。基于该啮合力分布,董惠敏将柔轮简化为没有轮齿的等厚度壳体有限元模型,在柔轮中面上施加啮合力,计算了传动状态下柔轮不同截面上的变形和应力^[7],并基于动态啮合仿真给出的啮合力,提出了渐开线齿廓的优化设计方法^[8]。考虑到传动荷载应该作用在轮齿上,陈晓霞等采用变截面壳单元和梁单元相结合的柔轮有限元模型,对波发生器及传动荷载共同作用下的柔轮应力以及齿根和齿尖处的变形进行了分析^[9],并对不同波发生器作用下柔轮中面的伸缩变形进行了研究^[10-11]。考虑到柔轮轮齿的影响,刘文芝等建立了实体单元柔轮模型,用三维弹性接触分析研究了柔轮应力和轮齿变形,计算分析了承载柔轮齿圈和筒体的应力分布规律^[12]。Li利用自编有限元软件建立实体有限元模型,计算了空载和负载状态下柔轮杯底的应力,并进行了实验验证^[13]。

考虑到柔轮在负载工况下的动态啮合状态,郑德林等采用边界元法计算柔轮变形,用轮齿的重叠量修正啮合力,获得了齿间啮合力分布^[14]。乐可锡等考虑传动元件的弹性、间隙、误差等影响因素,提出了求解谐波齿轮空间动态啮合力的直接迭代方法^[15]。崔博文等在实体有限元模型上定义了波发生器与柔轮内壁、柔轮齿与刚轮齿之间的接触关系,

计算了不同负载状态下的啮合齿对数和啮合力分布^[16]。姜世平等通过在刚轮上安装活齿测得的啮合力数据,利用统计方法得到啮合区切向力和径向力的实验曲线,从而获得了载荷区的内载荷分布方程^[17]。上述研究从理论分析、数值模拟和实验验证等方面,对揭示谐波齿轮多齿啮合特性起到了重要的推动作用。

目前,对实际工况下的谐波齿轮多齿对啮合工作状态尚缺乏简单有效的分析计算方法,难点在于:①影响因素多,因为啮合力与齿廓形状、空载状态下的空载侧隙分布及负载大小相关;②波发生器与柔轮、柔轮齿与刚轮齿之间的接触是非线性的,使啮合力计算建模复杂,分析耗时;③齿形很小,且多齿啮合的啮合侧隙在几微米到十几微米之间,实验验证非常困难。因此,啮合状态的有限元仿真成为一种有效可行的计算方法。

为反映负载工况下谐波齿轮的啮合特性,本文提出一种基于周向啮合刚度矩阵和空载侧隙的啮合力迭代算法。利用精确算法计算装配状态下的空载侧隙;建立参数化的、输出端固定的柔轮有限元模型,定义波发生器与柔轮内壁的接触关系,利用逐一施加单位啮合力的方法,提取单位啮合力与啮合点周向位移对应关系的啮合柔度矩阵,得到能更真实反映柔轮齿廓啮合点周向刚度特性的啮合刚度矩阵;根据空载侧隙,迭代计算不同负载工况下刚轮齿廓与柔轮齿廓间的负载侧隙和啮合力;建立包含刚轮齿廓和柔轮齿廓接触关系的实体有限元模型,仿真验证不同负载工况下的负载侧隙和啮合力分布,以及扭转刚度特性。

1 利用精确算法计算空载侧隙

装配状态的柔轮变形后,轮齿的位置由波发生器的形状确定。空载侧隙是指装配变形后柔轮轮齿与刚轮轮齿间的最小间隙。装配状态下谐波齿轮的空载侧隙与齿廓形状和波发生器类型相关。本文以双圆盘波发生器作用下的渐开线齿廓杯形柔轮为例进行计算分析。

1.1 基于精确算法的变形后柔轮轮齿定位

图1所示为双圆盘波发生器作用下的柔轮中性层变形示意图,图中 R 为圆盘的计算半径, e 为圆盘轴线的偏心距, γ 为柔轮对圆盘的包角, u_0 为最大径向变形。

在波发生器作用下,柔轮的中性层横截面从变形前半径为 r_m 的圆形(见图1)变为非圆曲线(图1中径矢为 ρ 的粗实线)。

中性层任意位置 φ 处的点在变形后的矢径

$$\rho = r_m + u(\varphi) \quad (1)$$

式中: r_m 为变形前柔轮中性层曲线的半径; $u(\varphi)$ 为变形后柔轮中性层曲线上任意点的径向位移。

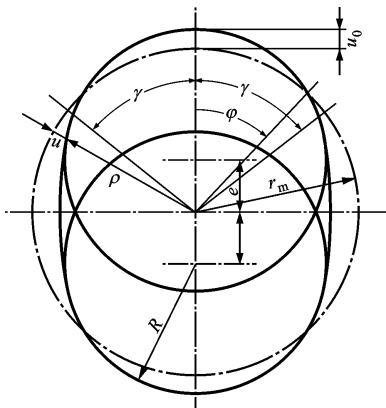


图1 双圆盘波发生器作用下的柔轮中性层变形

在双圆盘波发生器作用下,柔轮变形以包角 γ 为界,包角范围内柔轮齿圈变形后与波发生器完全贴合,其径向变形为 u_1 ,其余的径向变形为 u_2 。

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= \frac{A_1 \cos \varphi - B_1}{A_1 - B_1} u_0, & 0 \leq \varphi \leq \gamma \\ u_2 &= \frac{u_0}{A_1 - B_1} \left[(1 + \sin^2 \gamma) \sin \varphi + \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right) \cos \varphi - 2 \sin \gamma - B_1 \right], & \gamma < \varphi \leq \frac{\pi}{2} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

式中: $A_1 = \pi/2 - \gamma - \sin \gamma \cos \gamma$; $B_1 = 4[\cos \gamma - (\pi/2 - \gamma) \sin \gamma]/\pi$ 。

波发生器迫使柔轮啮合端中性层产生径向位移 $u(\varphi)$ 、周向位移 $v(\varphi)$ 和轮齿对称轴相对于径矢的转角 $\theta_{wz}(\varphi)$,如图2所示。柔轮啮合端中性层与齿对称线的交点 O_f 从初始 φ 位置移动到 φ_1 位置,轮齿对称线也转至图示 x_f 方向。

依据中性层变形曲线不伸长条件

$$r_m \varphi = \int_0^{\varphi_1} \sqrt{\rho^2 + \dot{\rho}^2} d\varphi_1$$

式中 $\dot{\rho} = \frac{d\rho}{d\varphi} = \frac{du(\varphi)}{d\varphi}$,为径向位移关于极角的变化

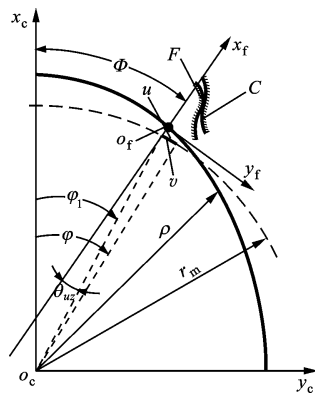


图2 柔轮啮合时的几何关系

率,装配变形使柔轮齿廓和刚轮齿廓的实际啮合位置发生在 φ_1 处。利用精确算法^[18],采用变量代换方法可求解变形后柔轮中性层上的位置 O_f ,其周向位移

$$v = -(\varphi_1 - \varphi)r_m \quad (3)$$

相对于变形后的齿根极径 $O_c O_f$,轮齿对称轴 x_f 的转角

$$\theta_{wz}(\varphi) = -\arctan\left(\frac{\dot{u}(\varphi)}{r_m + u(\varphi)}\right) \quad (4)$$

1.2 渐开线齿廓谐波齿轮的空载侧隙

用参数 s 表达的渐开线右侧齿廓方程^[19]为

$$\left. \begin{aligned} x &= r[\cos(s - \theta) + s \cos \alpha_0 \sin(s - \theta + \alpha_0)] \\ y &= r[-\sin(s - \theta) + s \cos \alpha_0 \cos(s - \theta + \alpha_0)] \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

式中: s 为齿廓上坐标点的弧长参数, $s = \tan \alpha_k - \tan \alpha_0$,其中 $\alpha_k = \arccos \frac{r \cos \alpha_0}{r_k}$ 为任意点的压力角, r_k 为齿廓上点的半径; α_0 为压力角; r 为柔轮分度圆半径; θ 为轮齿分度圆齿厚所对应的中心角的一半。

装配变形后的柔轮齿面和刚轮齿面间的最小周向距离,即该齿对间的侧隙

$$j_t \approx \sqrt{(x_{K_2} - x_{K_1})^2 + (y_{K_1} - y_{K_2})^2} \quad (6)$$

点 $K_1(x_{K_1}, y_{K_1})$ 是利用极值求解方法沿柔轮齿高方向取点对比计算出的柔轮齿廓到刚轮齿廓的最小周向距离点,刚轮齿廓啮合点 $K_2(x_{K_2}, y_{K_2})$ 为极径与 K_1 相等的刚轮齿廓上的对应点。

1.3 基于实体有限元模型的侧隙验证

由于空载侧隙是啮合力计算的基础,为此本文建立含真实渐开线齿廓信息的柔轮和刚轮有限元模型,对装配状态的柔轮变形和侧隙结果进行验证。某电子传动设备的额定扭矩为 $7 \text{ N} \cdot \text{m}$,其谐波齿轮的齿廓参数和结构参数如下:模数 $m = 0.2$,压力角 $\alpha_0 = 20^\circ$,柔轮最大径向变形量 $u_0 = 0.2 \text{ mm}$,柔轮

齿数 $z_1=140$, 刚轮齿数 $z_2=142$; 柔轮齿根圆半径 $r_f=14.156\text{ mm}$, 齿顶圆半径 $r_a=14.584\text{ mm}$; 柔轮变位系数 $x_1=2.13$, 刚轮变位系数 $x_2=1.925$; 齿圈壁厚 $\delta_1=0.3\text{ mm}$; 柔轮筒内半径 $r_i=13.856\text{ mm}$, 筒长 $l=30\text{ mm}$, 筒体壁厚 $\delta_2=0.273\text{ mm}$; 柔轮齿圈的宽度 $b=4\text{ mm}$, 柔轮中性层曲线半径 $r_m=14.006\text{ mm}$, 柔轮杯底固定孔内径 $d_{\text{rim}}=14.156\text{ mm}$; 圆盘轴线的偏心距 $e=0.6\text{ mm}$ 。

柔轮、刚轮齿廓选用 SOLID45 单元。利用二分法求解渐开线齿廓从齿顶到齿根 6 个均布的齿廓参数 s , 基于齿廓方程(5)得到 6 个不同的关键点坐标, 再用样条函数曲线连接生成柔轮、刚轮齿廓。柔轮筒体和双圆盘波发生器外表面选用 SHELL63 单元。双圆盘波发生器用 2 个对称的圆面来表示, 定义波发生器外表面与柔轮内壁的接触为刚体与柔体的面-面接触单元。以波发生器的上半圆为目标面, 定义 Target169 目标单元; 以柔轮的内壁为柔性接触面, 定义 Contal72 接触单元。固定约束柔轮杯底圆孔和波发生器表面, 求解装配状态下的柔轮变形。图 3 所示为谐波齿轮传动的有限元装配模型。

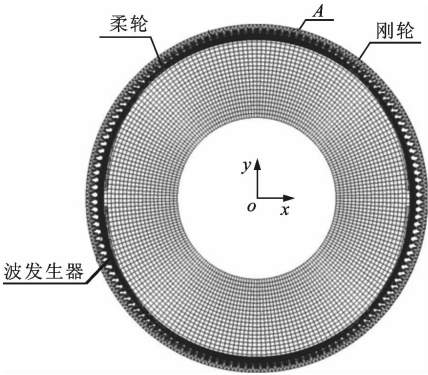


图 3 谐波齿轮传动的有限元装配模型

图 4 为图 3 中柔轮齿与刚轮齿啮合的局部放大图, 图中的数值为柔轮齿廓和刚轮齿廓的节点编号。

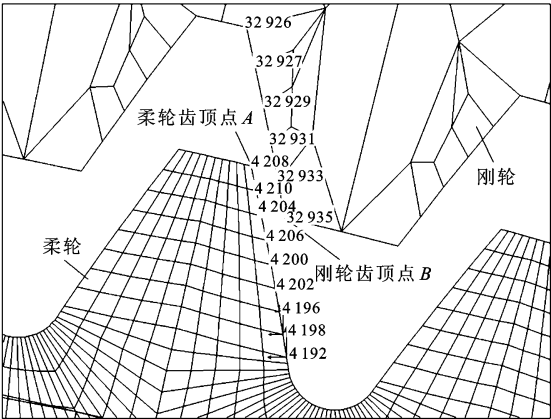


图 4 柔轮齿与刚轮齿啮合的局部放大图

柔轮齿廓在柔轮变形后发生位置和形状的改变, 因此, 柔轮齿廓变形后的位置根据齿廓上节点变形后的位置得到。这样, 柔轮齿廓和刚轮齿廓间的最小周向距离简化为变形后柔轮齿廓上的节点到刚轮齿廓的周向最小距离问题。

图 5 所示为空载侧隙的本文算法理论解和有限元分析结果, 图中横坐标是啮合齿位置的极角, $\varphi=0^\circ$ 表示长轴, 顺时针为正。图 5 显示, 2 种算法的空载侧隙在 $\varphi<25^\circ$ 区域内基本一致, 其他位置的理论解略大于有限元结果。

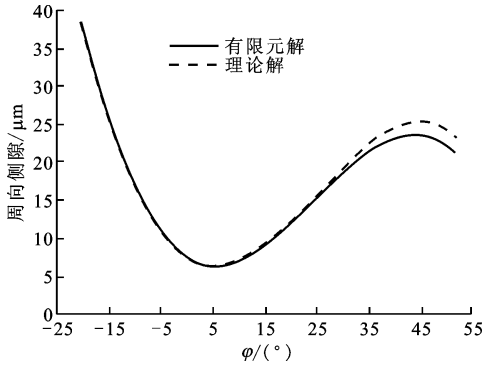


图 5 本文算法与有限元模型计算的空载侧隙

1.4 侧隙偏差的影响因素分析

柔轮轮齿的刚度远大于齿圈的刚度, 故通常认为柔轮在波发生器的作用下只是轮齿对称线与中性层曲线交点的位置产生径向位移 $u(\varphi)$ 、周向位移 $v(\varphi)$ 和相对于径矢的转角 $\theta_{uz}(\varphi)$, 轮齿本身不变形^[19]。图 6 所示为双圆盘波发生器作用下柔轮齿圈中性层变形位移的本文算法理论解与有限元解的比较, 图中横坐标 0° 对应长轴位置, 顺时针为正。为方便比较, 将本文算法式(2)、式(3)和式(4)中的径向位移、周向位移和法线转角进行归一化: $C_u = u/u_0$; $C_v = 2v/u_0$; $C_{\theta_{uz}} = \theta_{uz}r_m/(2u_0)$ 。

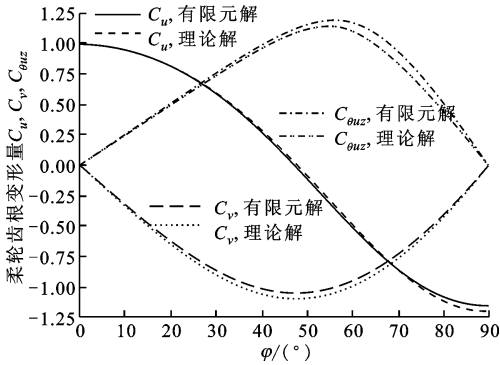


图 6 柔轮中性层位移的理论解与有限元解

图 6 显示, 在 $0^\circ<\varphi<55^\circ$ 区间上, 径向位移的理论解与有限元结果在啮合区间上基本一致; 短轴处

理论解略偏大,但不在啮合区间,不会影响侧隙;周向位移的理论解和有限元模型结果在长、短轴处完全一致,在其余位置小于有限元结果;法线转角理论解在 $\varphi < 45^\circ$ 处偏小,其余位置偏大。

理论解的周向位移和法线转角偏小都会引起侧隙偏大。由于齿高很小,法线转角偏差对侧隙影响不大,故柔轮中性层的周向位移偏差是空载侧隙偏差的主要来源。

2 啮合刚度矩阵及其性质

柔轮啮合刚度系数是引起柔轮啮合点单位周向位移所需的啮合力。柔轮周向位移由轮齿变形和柔轮筒体变形 2 部分组成,而轮齿变形又包括齿间接触变形、轮齿弯曲变形和柔轮齿圈变形。谐波齿轮柔轮受载后,柔轮筒体本身还会产生一定程度的畸变,因此理论推导啮合刚度非常复杂。本文通过三维实体单元的柔轮有限元模型进行啮合刚度矩阵的计算。

2.1 模型建立及装配变形求解

谐波齿轮传动中柔轮的变形是由波发生器和啮合力共同作用的结果,因此求解装配状态下的柔轮变形是求解负载状态的柔轮变形的基础。基于 1.3 节建立的实体有限元模型,在模型求解过程中保证波发生器长轴位置的径向变形量等于 u_0 ,从而获得装配状态下的周向位移。

2.2 单位啮合力引起的位移

在变形后的柔轮有限元模型上,沿柔轮齿啮合点切线方向逐一施加周向力(该周向力的幅值取额定扭矩下平均啮合力的 3~5 倍),提取所有啮合点处的周向位移,将其除以周向力幅值得到折算位移,即为折算单位力的柔度矩阵系数。图 7 所示为各啮合点的折算位移。

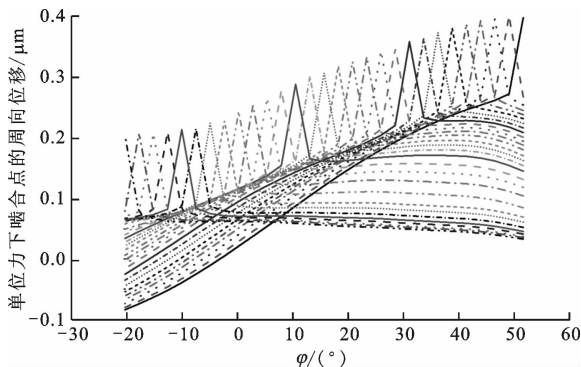


图 7 啮合点的折算位移

图 7 中:横坐标为柔轮轮齿啮合点位置的极角, $\varphi = 0^\circ$ 为长轴;纵坐标为所有啮合点的周向位移。根

据空载侧隙对应的极角范围,选取从长轴左侧 $\varphi = -21^\circ$ 至右侧 $\varphi = 51^\circ$ 可能与刚轮啮合的柔轮轮齿范围。图 7 中的尖点表示在某个轮齿上施加单位啮合力时,该啮合点的周向位移。被施加啮合力的齿上的位移最大,其余齿的位移较小,距离施加啮合力的齿位置越远的齿,位移就越小。这是由于施加啮合力的齿上的啮合点位移由齿体变形和柔轮筒体变形组成,而其余齿的啮合点位移主要是由筒体变形引起。柔轮不同位置齿上的啮合点受单位啮合力时,产生的啮合点周向位移分布不同,表明不同位置齿的啮合刚度不同。

2.3 啮合刚度矩阵

根据第 i 个单位啮合力引起的第 j 个柔轮齿上啮合点的周向位移 d_{ij} ($j = 1, 2, \dots, n$), 循环 $i = 1, \dots, n$ 次得啮合柔度矩阵

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1n} \\ d_{21} & d_{22} & \cdots & d_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ d_{n1} & d_{n2} & \cdots & d_{nn} \end{bmatrix} \quad (7)$$

$\mathbf{D}$ 中各行元素分别表示在不同齿上施加啮合力时所引起的所有啮合点的周向位移, n 为啮合点的数量。通过对柔度矩阵 $\mathbf{D}$ 求逆,可得啮合刚度矩阵

$$\mathbf{K} = \mathbf{D}^{-1} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \cdots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \cdots & k_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ k_{n1} & k_{n2} & \cdots & k_{nn} \end{bmatrix} \quad (8)$$

3 负载侧隙和啮合力迭代算法

3.1 啮合力迭代算法

在整个啮合过程中,波发生器和柔轮杯底固定,通过给刚轮施加逐渐增大的周向转动,来模拟谐波齿轮的负载传动状态。基于空载侧隙,求解负载工况下谐波齿轮的负载侧隙和啮合力分布。

首先定义啮合力数组 $\{F\}$ 和柔轮啮合点位移数组 $\{d\}$, 建立平衡方程

$$\{F\} = \mathbf{K}\{d\} \quad (9)$$

当刚轮啮合点的周向位移大于该齿对的空载侧隙与柔轮啮合点的周向位移之和时,柔轮与刚轮啮合,反之处于未啮合状态。对于已啮合齿,柔轮啮合点的位移 d_i 等于刚轮啮合点的周向位移减去该齿对的空载侧隙,且该啮合点出现未知啮合力 F_i 。对于未啮合的齿,啮合力 F_i 为 0,位移 d_i 未知。将以上数组元素代入式(9),利用迭代算法求解各啮合点的位移 $\{d_i\}$ 与啮合力 $\{F_i\}$, 迭代算法的流程如图 8

所示。具体步骤如下：

- (1) 设定初始数据，啮合齿数 $m=0$ ，啮合齿的编号 $i=0$ ，啮合齿编号数组 N 的所有元素置为 0，刚轮转动的周向位移初始步长 $b=0.1\text{ mm}$ ，最小迭代步长 $e=10^{-5}\text{ mm}$ ；初始状态下全部齿未啮合，啮合力数组 $\{F_i\}$ 为零；
- (2) 循环递增啮合齿数；
- (3) 循环递增刚轮转动的周向位移；
- (4) 求解平衡方程(9)，得柔轮各啮合点的周向位移。

逐一判断刚轮上各啮合点的周向位移 θ_m 是否小于第 i 个柔轮啮合点的周向位移 d_i 与该齿对间的空载侧隙 c_i 之和：若是，返回第(3)步循环；否则，判断步长 b 是否大于 e ，若是则令 $b=b/2$ 返回第(3)步，否则表明第 i 个齿已啮合，保存该啮合齿编号。最后，判断负载扭矩是否小于额定扭矩：若是，返回第(2)步；否则，保存柔轮啮合点位移、负载侧隙和啮合力，迭代结束。

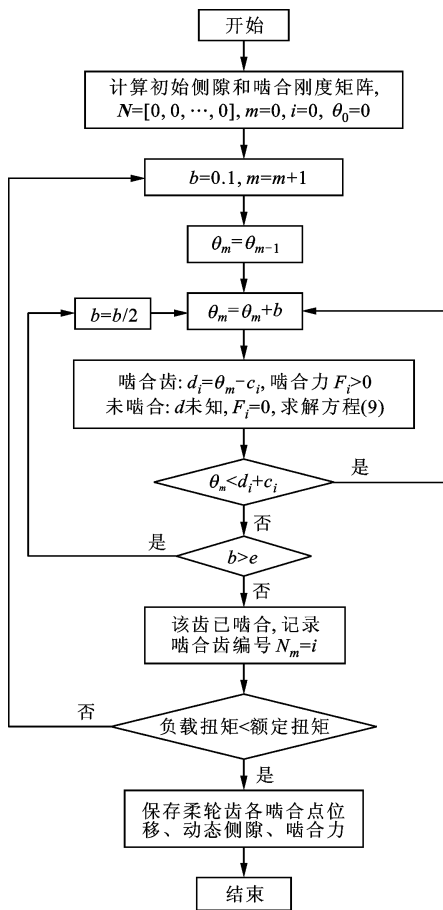


图 8 迭代算法的流程图

由以上迭代算法可知，啮合齿数从 0 按步长 1 递增，直到负载扭矩达到额定扭矩。在此过程中，已啮合齿数不断增加，柔轮各啮合点的周向位移和啮

合力在逐渐增大的刚轮啮合点周向位移作用下不断增大。

3.2 负载侧隙

不同负载下柔轮啮合点的周向位移和相对应的刚轮啮合点的周向位移不同，故负载工况下的侧隙是随负载大小变化的，本文定义其为负载侧隙。图 9 所示为本文算法计算的不同负载工况下的负载侧隙，图中：横坐标是柔轮啮合齿的位置极角，长轴处为 0，顺时针为正；图例为施加在刚轮上的周向转角 θ 和刚轮上对应的负载扭矩 T 。

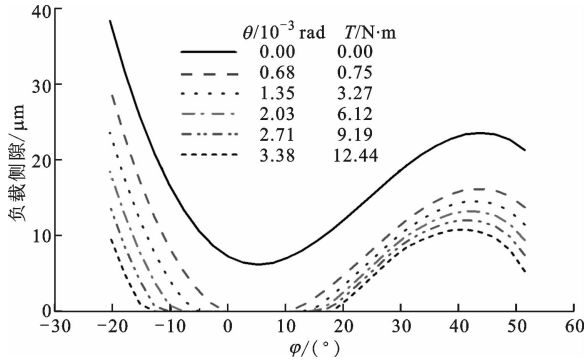


图 9 本文算法计算的负载侧隙

由图 9 可知：长轴右侧 $\varphi=5^\circ$ 附近的空载侧隙最小，且首先降到 0，表明此处的齿首先进入啮合；随着负载的增大，左右两侧齿的负载侧隙依次降为 0，相继进入啮合；在 $\varphi=51^\circ$ 处齿的负载侧隙下降更快，当刚轮的周向转角达到 $3.38\times 10^{-3}\text{ rad}$ (相应的负载扭矩为 $12.44\text{ N}\cdot\text{m}$) 时，负载侧隙降至 $5.34\text{ }\mu\text{m}$ 。如果继续加大负载，该齿的负载侧隙会降为 0，将发生齿廓干涉。

3.3 啮合力分布

图 10 给出了与图 9 相同负载下的啮合力分布，从中可以看出：在负载扭矩较小时，侧隙最小的齿 (本算例约在 $\varphi=5^\circ$ 处) 最先进入啮合，啮合力分布曲线在 $\varphi=5^\circ$ 处左右基本对称，最大啮合力为 8 N ；随负载增大，左右两侧的齿依次进入啮合，参与啮合

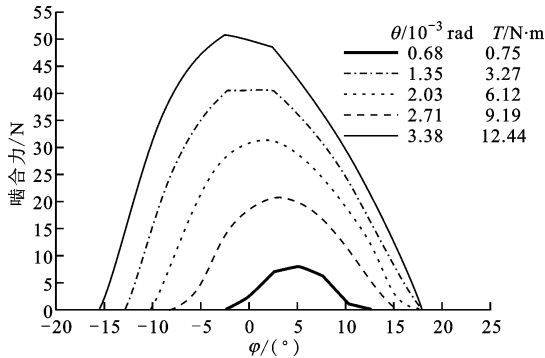


图 10 本文算法计算的啮合力分布

的齿对数量增多,最大啮合力出现的位置逐渐向长轴左侧偏移;在刚轮的周向转角达到 3.38×10^{-3} rad(负载扭矩为 $12.44 \text{ N} \cdot \text{m}$)时,最大啮合力幅值达到 51 N 。

4 啮合力的仿真实验

本文提出的啮合力和负载侧隙理论迭代算法所采用的线性啮合刚度矩阵,没有考虑啮合刚度随啮合力增大的非线性影响,特别是没有考虑不同啮合力作用于双圆盘波发生器使包角范围改变所引起的啮合刚度的非线性变化。为验证本文算法的有效性和适用范围,建立实体单元的有限元模型,利用有限元非线性接触分析方法,直接定义柔轮齿廓与刚轮齿廓间的接触关系,数值求解更贴近实际的啮合力和负载侧隙。

4.1 齿廓接触定义与接触分析

在有限元模型上的各啮合点的切线方向,定义三维点-点接触单元,可提高啮合齿面的接触计算效率。由柔轮啮合齿面上最小侧隙出现位置的分析可知,柔轮齿顶通常是侧隙点,因此首先定义柔轮齿顶点为接触单元端点。假定刚轮在传动过程中未变形,沿柔轮变形后齿顶矢径的切线方向,按照一定长度定义接触单元的另一端节点作为虚拟刚轮点。选用点-点接触单元 CONTA178 模拟啮合齿廓间的接触关系。选用增强拉格朗日接触算法,穿透容差小于 10^{-5} mm 。每个接触单元的侧隙(GAP)设定为空载侧隙。

首先进行波发生器作用下的空载变形状态求解,随后移动虚拟刚轮点到达空载啮合状态。按照本文算法实例的刚轮传动位移,沿周向逐步移动虚拟刚轮点,施加与实例相同的刚轮啮合点周向位移,依次求解虚拟刚轮在不同传动状态时柔轮的变形和接触单元状态。

求解结束后,依次提取每个载荷步下接触单元的状态参数——接触力(PRES)和 GAP,可获得接触面之间的法向接触力和负载侧隙。根据每个接触单元的状态参数,判断齿间啮合状态:对已啮合齿, $\text{PRES} > 0, \text{GAP} = 0$;对于未啮合齿, $\text{PRES} = 0, \text{GAP} < 0$ 。

4.2 有限元模型的负载侧隙和啮合力

图 11 是由有限元模型得出的负载侧隙曲线,实线为空载侧隙,其余曲线为不同负载下的负载侧隙。由于有限元模型的啮合刚度是非线性的,所以图 11 中的负载扭矩值与图 9、图 10 中的略有不同。由图 11 可知:在长轴右侧 $\varphi = 5^\circ$ 附近,负载侧隙首先降到

0;随负载的增大,左右两侧的齿的负载侧隙依次降至 0,表明这些齿已进入啮合,但长轴左侧的齿的负载侧隙下降更快;在刚轮转角为 $3.38 \times 10^{-3} \text{ rad}$ (负载扭矩为 $11.19 \text{ N} \cdot \text{m}$)时,左侧 $\varphi = -13^\circ$ 处齿的负载侧隙为 0,表明该齿进入啮合,此时最右侧 $\varphi = 51^\circ$ 处齿的负载侧隙为 $4.96 \mu\text{m}$ 。

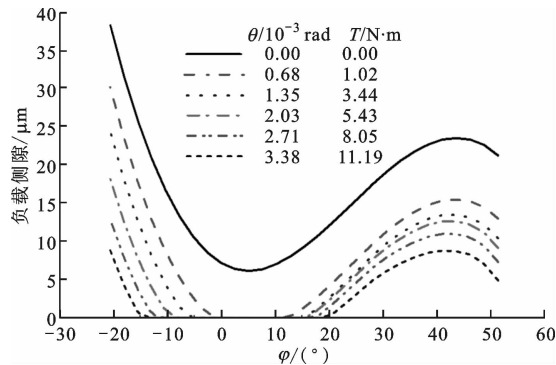


图 11 用有限元模型求得的负载侧隙曲线

图 12 为由有限元模型求得的啮合力分布曲线,可以看出:当负载扭矩较小时,在空载侧隙最小的位置 $\varphi = 5^\circ$ 处,齿出现了啮合力,在 $-5^\circ \leq \varphi \leq 15^\circ$ 区间上关于 $\varphi = 5^\circ$ 基本对称分布,最大啮合力为 9.6 N ;随负载增大,左右两侧参与啮合的齿逐渐增多,最大啮合力的位置向左明显偏移,在刚轮转角为 $3.382 \times 10^{-3} \text{ rad}$ (负载扭矩为 $11.19 \text{ N} \cdot \text{m}$)时,最大啮合力位置向左偏移了 8° ,最大啮合力幅值达到 43 N 。

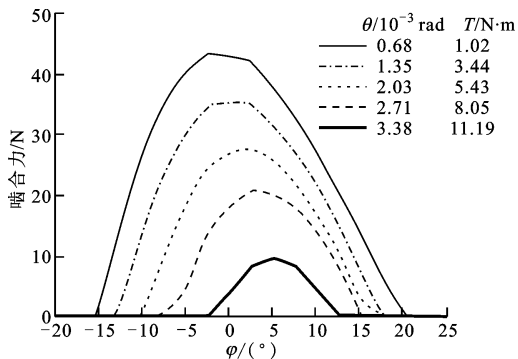


图 12 由有限元模型求得的啮合力分布

5 本文算法和有限元分析的比较

5.1 负载侧隙比较

对比图 9 和图 11 发现:负载侧隙的本文算法理论解和有限元解吻合得很好;在长轴右侧 $\varphi = 5^\circ$ 附近空载侧隙最小处,负载侧隙首先降为 0,表明该齿首先进入啮合;随着刚轮转角的增大,左右两侧的齿的负载侧隙逐渐降为 0,表明该部位的齿相继进入啮合;在刚轮转角为 $3.38 \times 10^{-3} \text{ rad}$ 时,理论解和有

限元解的啮合区间都为 $-13^{\circ} \leq \varphi \leq 18^{\circ}$; 在 $\varphi = -21^{\circ}$ 和 $\varphi = 51^{\circ}$ 处有限元解的负载侧隙都小于理论解的负载侧隙, 侧隙差值分别为 $1.04 \mu\text{m}$ 和 $0.38 \mu\text{m}$, 表明有限元解的负载侧隙比理论解下降得快, 在长轴左侧下降得更快, 但差异不大。

5.2 啮合力分布对比

对比图 10 和图 12 发现: 在刚轮转角不大时, 啮合力的本文算法理论解和有限元解关于 $\varphi = 5^{\circ}$ 左右对称分布, 区间相同, 但理论解的啮合力小于有限元解结果, 表明小负载时相比于有限元解, 理论解的刚度偏小; 随着刚轮转角的增大, 2 种方法的最大啮合力位置均向长轴左侧偏移了 8° , 啮合力分布区间相同, 但有限元解的啮合力幅值低于理论解; 至最大刚轮转角时, 理论解的最大啮合力比有限元解的大 17% 左右, 表明大负载时理论解的刚度略大于有限元解。

5.3 单齿啮合力分析

为定量分析本文算法理论解的啮合力与有限元解的差异, 给出了 2 种算法得出的最先进入啮合的 2 对齿 (分别为波发生器长轴右侧的第 3 号齿和第 4 号齿) 上啮合力随刚轮转角的变化曲线, 如图 13 所示。

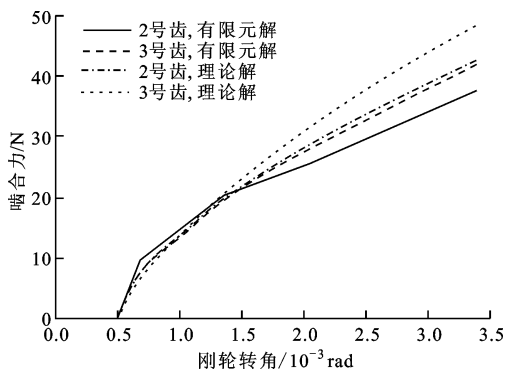


图 13 本文算法与有限元分析得出的单齿啮合力曲线

由图 13 可以看出: 在刚轮转角小于 $1.5 \times 10^{-3} \text{ rad}$ 的低负载工况下, 2 个啮合点上理论解与有限元解的啮合力吻合良好, 但随刚轮转角的增大, 单齿啮合力的理论解大于有限元解。这是由于随着负载的增加, 有限元模型的啮合刚度呈非线性变化并略有下降所致。

5.4 扭转刚度对比

图 14 所示为理论解与有限元解的负载扭矩-刚轮转角曲线。转角 $0.45 \times 10^{-3} \text{ rad}$ 为刚轮的空程转角, 此时轮齿刚进入空载的啮合状态。去除刚轮转过的空程, 曲线的斜率为扭转刚度。

从图 14 可以看出: 理论解的扭转刚度为常数; 在刚轮转角小于 $1.5 \times 10^{-3} \text{ rad}$ 的低负载工况下, 负载扭矩与刚轮转角呈现线性关系, 有限元解与理论

解吻合良好; 随刚轮转角的增大, 有限元解的扭转刚度呈现非线性, 理论解的扭转刚度大于有限元解, 但 2 种方法的负载扭矩偏差不大, 在刚轮最大转角时的扭矩偏差约为 11.21%。

通过查阅 Harmonic Drive 组件型产品综合目录得知, 本文算例的额定扭矩在 $7 \text{ N} \cdot \text{m}$ 左右。由图 14 可知, 对于 $12 \text{ N} \cdot \text{m}$ 以下的负载扭矩, 本文算法给出的扭转刚度与有限元分析的结果基本吻合。

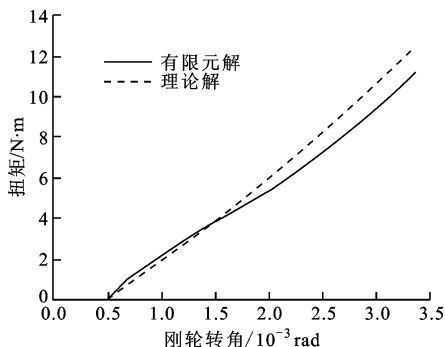


图 14 本文算法与有限元分析得出的负载扭矩-刚轮转角曲线

6 结 论

(1) 在低负载工况下, 单个齿上的啮合力与刚轮转角呈现线性关系; 随负载的增大, 单个齿上的啮合力与刚轮转角呈现非线性关系。

(2) 啮合力分布关于最小侧隙位置左右基本对称; 当负载较大时, 轮齿的啮合刚度非线性变化显著, 最大啮合力位置向左侧明显偏移。本文理论算法得到的轮齿啮合刚度偏大, 故其啮合力幅值总体高于有限元模型的。

(3) 在额定扭矩下, 本文算法给出的扭转刚度与有限元分析给出的非线性结果基本吻合。

参考文献:

- [1] 伊万诺夫. 谐波齿轮传动 [M]. 沈允文, 等译. 北京: 国防工业出版社, 1987: 4-11, 93.
- [2] 刘怀兰, 廖岭, 周源. 基于知识流动视角的工程技术预测: 以谐波减速器为例 [J]. 中国机械工程, 2016, 27(24): 3317-3325.
- LIU Huailan, LIAO Ling, ZHOU Yuan. Knowledge flow based engineering technology forecasting: a case of harmonic reducer [J]. China Mechanical Engineering, 2016, 27(24): 3317-3325.
- [3] MAITI R, ROY A K. Minimum tooth difference in internal-external involute gear pair [J]. Mechanism and Machine Theory, 1996, 31(4): 475-485.

- [4] 谷勇霞,赵杰亮,阎绍泽,等.考虑谐波传动滞后的柔性空间机械臂运动精度[J].机械工程学报,2013,49(23):74-79.
GU Yongxia, ZHAO Jieliang, YAN Shaoze, et al. Kinematic accuracy of the flexible space manipulator with harmonic drive[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2013, 49(23): 74-79.
- [5] 高海波,李志刚,邓宗全.基于ANSYS的杯形柔轮结构参数对柔轮应力的敏感度分析[J].机械工程学报,2010,46(5):1-7.
GAO Haibo, LI Zhigang, DENG Zongquan. Sensitivity analysis of cup-shaped flexible gear parameters to its stress based on ANSYS[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2010, 46(5): 1-7.
- [6] 付军锋,董海军,沈允文.谐波齿轮传动中柔轮应力的有限元分析[J].中国机械工程,2007,18(18):2210-2214.
FU Junfeng, DONG Haijun, SHEN Yunwen. The finite element analysis of the stress of flexible in harmonic drive[J]. Chinese Mechanical Engineering, 2007, 18(18): 2210-2214.
- [7] DONG H M. Elastic deformation characteristic of the flexspline in harmonic drive [C]// ASME/IFTOMM International Conference on Reconfigurable Mechanisms and Robots. London, UK: IEEE Computer Society, 2009: 363-369.
- [8] DONG Huimin, ZHU Zhengdu, ZHOU Weidong, et al. Dynamic simulation of harmonic gear drives considering tooth profiles parameters optimization[J]. Journal of Computers, 2012, 7(6): 1429-1436.
- [9] CHEN Xiaoxia, LIN Shuzhong, XING Jingzhong. Deformation of flexspline under transmission force in harmonic drive[J]. Advanced Materials Research, 2010, 97/98/99/100/101: 3536-3539.
- [10] CHEN Xiaoxia, LIU Yusheng, XING Jingzhong, et al. A novel method based on mechanical analysis for the stretch of the neutral line of the flexspline cup of a harmonic drive[J]. Mechanism and Machine Theory, 2014, 76: 1-19.
- [11] 陈晓霞,刘玉生,邢静忠,等.谐波齿轮中柔轮中性层的伸缩变形规律[J].机械工程学报,2014,50(21):189-196.
CHEN Xiaoxia, LIU Yusheng, XING Jingzhong, et al. Neutral line stretch of flexspline in harmonic driver[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2014, 50(21): 189-196.
- [12] 刘文芝,张乃人,张春林,等.谐波齿轮传动中杯形柔轮的有限元计算与分析[J].机械工程学报,2006,42(4):52-57.
LIU Wenzhi, ZHANG Nairen, ZHANG Chunlin, et al. The finite element calculation and analysis of the cup-shaped flexible in harmonic drive[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2006, 42(4): 52-57.
- [13] LI Shuting. Diaphragm stress analysis and fatigue strength evaluation of the flexspline a very thin-walled spur gear used in the strain wave gearing[J]. Mechanism and Machine Theory, 2016, 104: 1-16.
- [14] 郑德林,胡燕海,李华敏.谐波齿轮传动齿间啮合力分布规律及柔轮齿根应力的计算[J].齿轮,1989,13(2):11-12,26.
ZHENG Delin, HU Yanhai, LI Huamin. The distribution of meshing forces between engaged tooth pairs and the calculation of stress of tooth dedendum in harmonic drive[J]. Journal of Mechanical Transmission, 1989, 13(2): 11-12, 26.
- [15] 乐可锡,全永昕,周桂如.谐波齿轮传动中空间动态啮合力的理论计算[J].浙江大学学报,1995,29(2):219-229.
LE Kexi, QUAN Yongxin, ZHOU Guiru. Theoretical calculation of space dynamic meshing loads in harmonic gear drive[J]. Journal of Zhejiang University, 1995, 29(2): 219-229.
- [16] 崔博文,沈允文.用有限元法研究谐波齿轮传动齿间啮合力的分布规律[J].机械传动,1997,21(1):7-9,54.
CUI Bowen, SHEN Yunwen. Study on load distribution in gear of harmonic drive by finite element method[J]. Mechanical Transmission, 1997, 21(1): 7-9, 54.
- [17] 姜世平,陈湛闻,聂绍民,等.谐波齿轮传动中柔轮载荷分布规律分析研究[J].机械设计,2001(6):11-13.
JIANG Shiping, CHEN Chenwen, NIE Shaomin, et al. A study on the analysis of load distribution law of flexible wheel in harmonic gear drive[J]. Journal of Machine Design, 2001(6): 11-13.
- [18] 陈晓霞,林树忠,邢静忠.谐波齿轮传动中基于柔轮装配变形的共轭精确算法[J].中国机械工程,2010,21(17):2053-2057.
CHEN Xiaoxia, LIN Shuzhong, XING Jingzhong. Exact conjugate algorithm based on assemble deformation of flexspline in harmonic drive[J]. China Mechanical Engineering, 2010, 21(17): 2053-2057.
- [19] 沈允文,叶庆泰.谐波齿轮传动的理论和设计[M].北京:机械工业出版社,1985:55,83.

(编辑 葛赵青)