

DOI: 10.7652/xjtuxb201902014

电动汽车永磁轮毂电机磁场非线性解析计算方法

杨明磊¹, 邓兆祥^{1,2}, 张河山³, 杨定伟³

(1. 重庆大学机械工程学院, 400044, 重庆; 2. 重庆大学机械传动国家重点实验室, 400044, 重庆;
3. 重庆大学汽车工程学院, 400044, 重庆)

摘要: 针对传统解析法通常假设铁磁材料磁导率为无穷大、忽略了磁饱和效应的问题,提出一种考虑铁磁材料磁导率非线性影响的磁场解析建模方法。利用复数形式的傅里叶级数和柯西乘积将材料磁导率嵌入到静磁场求解中,将永磁轮毂电机分为定子齿槽、气隙和永磁体 3 个求解域,以矢量磁位为求解变量,根据激励源的不同在各求解域建立拉普拉斯方程或泊松方程,联立边界条件求得各域矢量磁位。根据材料非线性 $B-H$ 曲线,利用迭代算法得到了各工况下定子齿上的相对磁导率分布,计算了空载、电枢、负载磁场分布及输出转矩,并通过有限元法验证了该非线性解析法较传统解析法更准确。

关键词: 永磁轮毂电机;非线性解析法;相对磁导率;磁场分布

中图分类号: TM351 **文献标志码:** A **文章编号:** 0253-987X(2019)02-0104-09

A Nonlinear Analysis for Magnetic Field of Permanent Magnet Hub Motor of Electric Vehicles

YANG Minglei¹, DENG Zhaoxiang^{1,2}, ZHANG Heshan³, YANG Dingwei³

(1. School of Mechanical Engineering, Chongqing University, Chongqing 400044, China;
2. State Key Laboratory of Mechanical Transmission, Chongqing University, Chongqing 400044, China;
3. School of Automotive Engineering, Chongqing University, Chongqing 400044, China)

Abstract: A magnetic field analytical modeling method that considers the nonlinear influence of magnetic permeability of ferromagnetic materials is proposed to solve the problem that traditional analytical methods usually assume that the permeability of ferromagnetic materials is infinite and ignore the effect of magnetic field saturation. The material permeability is embedded into the static magnetic field by using the complex Fourier series and the Cauchy product, and the permanent magnet hub motor is divided into three domains: the stator tooth/slot, air gap and permanent magnet. The vector magnetic potential is used as a solution variable, Laplace equations or Poisson equations are established in each solution domain according to difference of excitation sources, and the vector magnetic potential of each domain is obtained by simultaneous boundary conditions. According to the nonlinear $B-H$ curve of the material, an iterative algorithm is used to obtain the relative permeability distribution on the stator teeth under various working conditions. The no-load, armature, load air gap flux density and output torque are calculated. A finite element method is used to verify that the nonlinear analytical method is more accurate than the traditional analytical methods.

Keywords: permanent magnet hub motor; nonlinear analytical method; relative magnetic permeability; magnetic field distribution

永磁电机由于具有高动态性能、高扭矩密度和高能量转换效率而广泛应用于工业领域,特别是电动汽车领域^[1]。准确地计算电机气隙磁场的分布是电机初始设计和优化的关键环节。永磁电机二维气隙磁场求解多采用有限元法和解析法,有限元法能够处理材料非线性特点,具有计算精度高、可处理复杂结构的优点,但建模和计算耗时较长,而解析法不但计算时间短,而且能够揭示设计参数与电机性能之间的关系,对于电机的基础研究和初始优化设计有极大的帮助^[2-4]。

近年来国内外学者在电机解析方面做了大量研究工作,提出了很多有价值的解析计算方法,主要包括保角变化法^[5-7]、子域模型法^[8-14]和谐波建模(HM)法^[15-16]。保角变换法主要是通过许可变换,将复杂边界的未知场区域变成简单边界的已知场区域来求解气隙磁场的分布。文献[5-7]利用保角映射的方法求解电机气隙的相对磁导率函数,可以准确地反映定子开槽对气隙磁场的影响,但是将定子槽深假设为无穷大,不能考虑实际槽深对磁场的影响。子域模型法是目前最常用的电机解析建模方法,主要是基于分离变量法获得各子域的傅里叶级数形式解。Zhu等利用傅里叶级数法把定子槽作为求解域,建立了考虑定子开槽的永磁电机空载磁场解析模型^[8],计算精确性较好。Wu等在文献[8]的基础上将定子槽开口作为求解域,进一步分析了定子齿尖的存在对电机空载磁场和电枢磁场的影响,所得到的解析结果与有限元法结果吻合较好^[9-10]。郭思源等基于子域模型法建立了埋入式永磁电机机械模型,计算了电机空载磁场、电枢磁场和负载磁场分布,并通过有限元法验证了模型的正确性^[11]。杨金歌等利用子域模型法建立了在定子齿上开辅助槽的表贴式永磁同步电机的解析模型,利用该模型对齿槽转矩进行了优化设计,经有限元法验证了模型的正确性^[12]。上述方法虽然能够对电机进行精确地建模,但是都假设电机导磁材料相对磁导率为无穷大,忽略了磁阻对电机电磁性能的影响。在子域模型法的基础上,Wu等将复杂磁导率模型和等效磁路法结合起来,建立了表贴式永磁电机的非线性混合场模型,该模型能够考虑磁导率的影响,提高了计算精度,并通过有限元法和试验验证了模型的正确性^[13]。Lazhar等通过利用非齐次诺伊诺边界条

件提出了一种半解析模型,考虑导磁材料为具体值,分析了磁饱和对电磁性能的影响^[14],但是两个模型并不能考虑导磁材料的非线性变化。谐波建模(HM)法是将电机划分为几个求解域,结合边界条件求解各域的偏微分方程,从而得到复数形式的傅里叶级数解析解。Sprangers等开始考虑铁磁材料特性,采用谐波建模技术建立两种开槽电机的解析模型,研究了材料相对磁导率对电机气隙磁密的影响,该解析模型未考虑定子槽开口,且将电枢绕组简化为点电流^[15]。虽然电机模型较为简化,激励源单一,但为考虑铁磁材料磁导率的解析计算提供了指导。Djelloul等在文献[15]的基础上建立了一个非线性开关磁阻电机的解析模型,分析了电机的磁场分布和电磁性能,通过有限元法验证了该模型的准确性和有效性^[16],但该方法未涉及永磁材料,在分析永磁电机时具有一定的局限性。

本文在文献[16]的基础上,考虑了永磁体,将非线性建模方法扩展到永磁轮毂电机,借鉴文献[8-9]的方式将电机分成定子齿域、气隙域和永磁体域3个求解域,利用复数形式的傅里叶级数和柯西乘积将相对磁导率嵌入到静磁场求解中,考虑材料非线性 $B-H$ 曲线,利用迭代算法可以计算任意工况下定子齿上的相对磁导率数值。利用该非线性解析模型计算了电机空载、电枢和负载工况下的气隙磁通密度和输出转矩,并与非线性有限元结果和传统解析结果进行对比,验证了该非线性模型的准确性。

1 电机解析模型

本文以电动汽车用轮毂电机为例进行推导和求解,图1给出了电机的结构展开简图。为了便于数学建模,需要做以下假设:①在二维平面内,忽略电机的涡流效应和端部效应;②假设定子的磁导率在径向方向上是不变的,在切向方向上是变化的;③假

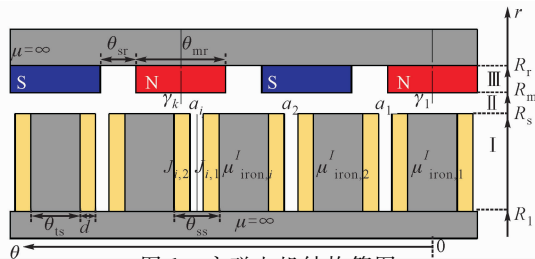


图1 永磁电机结构简图

设定子槽为径向开口槽,槽内左右线圈的电流密度各自均匀分布且只有沿 Z 轴的分量;④假设没有饱和情况的定子轭和转子轭的相对磁导率为无穷大。

将二维极坐标 (r, θ) 固定在定子上,以某个齿的中心线作为初始位置,即 $\theta=0$;定义某个 N 极永磁体中线与初始位置的夹角为 ϕ ; R_1 、 R_s 、 R_m 和 R_r 分别为定子轭、定子齿顶部、永磁体表面和转子轭底部半径; θ_{mr} 为永磁体宽度; θ_{ts} 为定子齿宽度; θ_{ss} 为定子槽宽度; d 为绕组的宽度。第 i 个槽开口的位置 α_i 和第 k 个 N 极永磁体的位置 γ_k 可以表示成

$$\alpha_i = \frac{2\pi}{Q_s}i - \frac{\pi}{Q_s} \quad (1)$$

$$\gamma_k = \frac{2\pi}{p}(k-1) + \phi \quad (2)$$

式中: Q_s 为定子齿数; p 为极对数; $1 \leq i \leq Q_s$; $1 \leq k \leq p$ 。

2 电枢电流密度和定子磁导率分布

2.1 电枢电流分布

如图1所示,定子槽包含两个线圈,定子绕组电流密度的傅里叶级数的复数形式为

$$\mathbf{J} = J_z(\theta) \mathbf{e}_z \quad (3)$$

$$J_z(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{J}_{z,n} e^{-jn\theta} \quad (4)$$

式中 n 是谐波次数,则傅里叶系数 $\hat{J}_{z,n}$ 可以表示成

$$\begin{aligned} \hat{J}_{z,n} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} J_z(\theta) e^{jn\theta} d\theta = \\ &\sum_{i=1}^{Q_s} \frac{1}{2\pi j n} \left[J_{i,1} e^{-jn\theta_{ss}/2} (e^{jn\alpha_i} - 1) + \right. \\ &\left. J_{i,2} e^{jn\theta_{ss}/2} (1 - e^{-jn\alpha_i}) \right] e^{jn\alpha_i} \end{aligned} \quad (5)$$

式(5)中双层电枢绕组的电流密度被定义为

$$J_{i,1} = \frac{N_q}{S} \mathbf{C}_1^T [i_A \ i_B \ i_C]^T \quad (6)$$

$$J_{i,2} = \frac{N_q}{S} \mathbf{C}_2^T [i_A \ i_B \ i_C]^T \quad (7)$$

式中: N_q 为单侧线圈导体数; $S = d(R_s^2 - R_1^2)/2$ 为单侧线圈的表面积; $\mathbf{C}_1^T$ 和 $\mathbf{C}_2^T$ 是电机定子槽内线圈的分布矩阵的转置矩阵。

2.2 定子磁导率分布

对于 I 域上槽/齿磁导率分布的傅里叶级数的复数形式可表示为

$$\mu(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{\mu}_n e^{-jn\theta} \quad (8)$$

$$\mu^{\text{rec}}(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{\mu}_n^{\text{rec}} e^{-jn\theta} \quad (9)$$

式中:傅里叶系数 $\hat{\mu}_n$ 和 $\hat{\mu}_n^{\text{rec}}$ 可通过 I 域的磁导率分布计算, I 域的磁导率分布为

$$\mu^{\text{I}}(\theta) = \begin{cases} \mu_0, & \theta \in \left[\alpha_i - \frac{\theta_{ss}}{2}, \alpha_i + \frac{\theta_{ss}}{2} \right] \\ \mu_{\text{iron},i}^{\text{I}}, & \theta \in \left[\alpha_i - \frac{\theta_{ss}}{2} - \theta_{ts}, \alpha_i - \frac{\theta_{ss}}{2} \right] \end{cases} \quad (10)$$

式中 μ_0 为空气磁导率。则傅里叶系数 $\hat{\mu}_n$ 可表示为

$$\hat{\mu}_n^{\text{I}} = \begin{cases} \sum_{i=1}^{Q_s} \frac{1}{2\pi j n} \left[\mu_{\text{iron},i}^{\text{I}} e^{-jn\theta_{ss}/2} (1 - e^{-jn\theta_{ts}}) + \right. \\ \left. 2j\mu_0 \sin\left(\frac{n\theta_{ss}}{2}\right) \right] e^{jn\alpha_i}, & n \neq 0 \\ \sum_{i=1}^{Q_s} \frac{1}{2\pi} (\mu_{\text{iron},i}^{\text{I}} \theta_{ts} + \mu_0 \theta_{ss}), & n = 0 \end{cases} \quad (11)$$

根据快速傅里叶级数分解原理^[15],在求解傅里叶系数 $\hat{\mu}_n^{\text{rec}}$ 时,可用 $\{1/\mu_0, 1/\mu_{\text{iron},i}^{\text{I}}\}$ 替代式(11)中的 $\{\mu_0, \mu_{\text{iron},i}^{\text{I}}\}$ 。

3 解析模型的推导

通过复数形式的傅立叶级数法和分离变量法,可在所有求解域中求得泊松方程或拉普拉斯方程的解。根据安培环路定律可得

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} \quad (12)$$

在线性媒质中,磁场强度矢量 $\mathbf{H}$ 、磁感应强度矢量 $\mathbf{B}$ 和磁化矢量 $\mathbf{M}$ 满足以下关系式

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mu_r \mathbf{H} + \mu_0 \mathbf{M} \quad (13)$$

由 $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ 以及库仑规范 $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$,式(13)可以表示成

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu_0 \mu_r \mathbf{J} - \mu_0 \nabla \times \mathbf{M} \quad (14)$$

矢量磁位的傅里叶级数的复数形式可表示为

$$\mathbf{A} = A_z(r, \theta) \mathbf{e}_z \quad (15)$$

$$A_z(r, \theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{A}_{z,n}(r) e^{-jn\theta} \quad (16)$$

磁通密度矢量和磁场强度矢量可表示为

$$\mathbf{B} = B_r(r, \theta) \mathbf{e}_r + B_\theta(r, \theta) \mathbf{e}_\theta \quad (17)$$

$$\mathbf{H} = H_r(r, \theta) \mathbf{e}_r + H_\theta(r, \theta) \mathbf{e}_\theta \quad (18)$$

为方便表示,在此定义一个复数形式的傅里叶级数

$$\Omega(r, \theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{\Omega}_n(r) e^{-jn\theta} \quad (19)$$

式中: Ω 可以代表径向磁通密度 B_r 、切向磁通密度 B_θ 、径向磁场强度 H_r 和切向磁场强度 H_θ 。为了获得实际的磁场,无限傅里叶级数的求和需要被截断,所以仅考虑 $-N \leq n \leq N$ 。 N 表示磁场求解中考虑

的最高空间谐波次数^[15]。

根据 $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$, 磁通密度的径向分量和切向分量可以表示成

$$B_r = \frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \theta} \quad (20)$$

$$B_\theta = -\frac{\partial A_z}{\partial r} \quad (21)$$

将式(20)和(21)写成矩阵形式

$$\mathbf{B}_r = -j \frac{1}{r} \mathbf{K} \mathbf{A}_z \quad (22)$$

$$\mathbf{B}_\theta = -\frac{\partial \mathbf{A}_z}{\partial r} \quad (23)$$

式中 $\mathbf{K}$ 为对角矩阵

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} -N & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & N \end{bmatrix} \quad (24)$$

根据式(13), 气隙子域空气的磁导率在切向方向上不发生变化, 所以 $B_r = \mu_0 H_r$, $B_\theta = \mu_0 H_\theta$ 。永磁体域的磁感应强度为 $B_r = \mu_0 H_r + \mu_0 M_r$, $B_\theta = \mu_0 H_\theta + \mu_0 M_\theta$ 。对于定子域磁感应强度可表示为

$$B_r = \mu_{c,r} H_r \quad (25)$$

$$B_\theta = \mu_{c,\theta} H_\theta \quad (26)$$

式中: $\mu_{c,r}$ 和 $\mu_{c,\theta}$ 分别表示径向和切向磁导率。根据复数形式的傅里叶级数和柯西乘积^[16], 式(25)、(26)可表示成

$$\hat{B}_{r,n} = \sum_{y=-N}^N \hat{\mu}_{n-y} \hat{H}_{r,y} \quad (27)$$

$$\hat{H}_{\theta,n} = \sum_{y=-N}^N \hat{\mu}_{n-y}^{\text{rec}} \hat{B}_{\theta,y} \quad (28)$$

将式(27)、(28)写成矩阵形式

$$\mathbf{B}_r = \boldsymbol{\mu}_{c,r} \mathbf{H}_r \quad (29)$$

$$\mathbf{B}_\theta = [\boldsymbol{\mu}_{c,\theta}^{\text{rec}}]^{-1} \mathbf{H}_\theta = \boldsymbol{\mu}_{c,\theta} \mathbf{H}_\theta \quad (30)$$

式中径向和切向磁导率的卷积矩阵为

$$\boldsymbol{\mu}_{c,r} = \begin{bmatrix} \hat{\mu}_0 & \cdots & \hat{\mu}_{-2N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{\mu}_{2N} & \cdots & \hat{\mu}_0 \end{bmatrix} \quad (31)$$

$$\boldsymbol{\mu}_{c,\theta} = [\boldsymbol{\mu}_{c,\theta}^{\text{rec}}]^{-1} = \begin{bmatrix} \hat{\mu}_0^{\text{rec}} & \cdots & \hat{\mu}_{-2N}^{\text{rec}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{\mu}_{2N}^{\text{rec}} & \cdots & \hat{\mu}_0^{\text{rec}} \end{bmatrix}^{-1} \quad (32)$$

3.1 定子齿/槽域通解

定子齿/槽域中有电流密度分布, 但是没有磁化强度分量, 且定子齿处切向的磁导率是不连续的, 根据式(14), 其求解域的泊松矩阵方程为

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial^2 \mathbf{A}_z^{\text{I}}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \mathbf{A}_z^{\text{I}}}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \mathbf{V}^{\text{I}} \mathbf{A}_z^{\text{I}} &= -\boldsymbol{\mu}_{c,\theta}^{\text{I}} \mathbf{J}_z \\ R_1 < r < R_s \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

式中 $\mathbf{V}^{\text{I}} = \boldsymbol{\mu}_{c,\theta}^{\text{I}} \mathbf{K} [\boldsymbol{\mu}_{c,r}^{\text{I}}]^{-1} \mathbf{K}$ 。 $\mathbf{J}_z$ 是由系数 $\hat{J}_{z,n}$ 组成的列向量

$$\mathbf{J}_z = [\hat{J}_{z,-N}, \cdots, \hat{J}_{z,N}]^{\text{T}} \quad (34)$$

则方程(33)的通解为

$$\mathbf{A}_z^{\text{I}} = \mathbf{W}^{\text{I}} \left(\frac{r}{R_s} \right)^{\boldsymbol{\lambda}^{\text{I}}} \mathbf{a}^{\text{I}} + \mathbf{W}^{\text{I}} \left(\frac{R_1}{r} \right)^{\boldsymbol{\lambda}^{\text{I}}} \mathbf{b}^{\text{I}} + \mathbf{F}^{\text{I}} r^2 \quad (35)$$

式中: $\boldsymbol{\lambda}^{\text{I}}$ 和 $\mathbf{W}^{\text{I}}$ 分别为 $\sqrt{\mathbf{V}^{\text{I}}}$ 的特征值矩阵和特征向量矩阵; $\mathbf{a}^{\text{I}}$ 和 $\mathbf{b}^{\text{I}}$ 为待求解的谐波系数矩阵; $\mathbf{F}^{\text{I}}$ 为方程(33)的特解

$$\mathbf{F}^{\text{I}} = -(\mathbf{I} - \mathbf{V}^{\text{I}})^{-1} \boldsymbol{\mu}_{c,\theta}^{\text{I}} \mathbf{J}_z \quad (36)$$

其中 $\mathbf{I}$ 是大小与 $\mathbf{K}$ 相同的单位矩阵。

3.2 气隙域通解

气隙域中既没有电流密度分布, 也没有磁化强度分量, 因此根据式(14), 气隙子域的拉普拉斯矩阵方程为

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial^2 \mathbf{A}_z^{\text{II}}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \mathbf{A}_z^{\text{II}}}{\partial r} - \frac{\mathbf{K}^2}{r^2} \mathbf{A}_z^{\text{II}} &= \mathbf{0} \\ R_s < r < R_m \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

方程(37)的通解为

$$\mathbf{A}_z^{\text{II}} = \left(\frac{r}{R_m} \right)^{\boldsymbol{\lambda}^{\text{II}}} \mathbf{a}^{\text{II}} + \left(\frac{R_s}{r} \right)^{\boldsymbol{\lambda}^{\text{II}}} \mathbf{b}^{\text{II}} \quad (38)$$

式中: $\boldsymbol{\lambda}^{\text{II}} = \sqrt{\mathbf{K}^2} = |\mathbf{K}|$; $\mathbf{a}^{\text{II}}$ 和 $\mathbf{b}^{\text{II}}$ 为谐波系数矩阵。

3.3 永磁体域通解

由于永磁体域中没有电流密度分布, 但是有磁化强度分量。在二维平面内, 磁化强度矢量沿 Z 轴方向不变, 但根据永磁体磁化方式不同在径向和周向存在分量。因此根据式(14), 永磁体子域的泊松矩阵方程为

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial^2 \mathbf{A}_z^{\text{III}}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \mathbf{A}_z^{\text{III}}}{\partial r} - \frac{\mathbf{K}^2}{r^2} \mathbf{A}_z^{\text{III}} &= -\frac{\mu_0}{r} \left(\mathbf{M}_\theta - \frac{\partial \mathbf{M}_r}{\partial \theta} \right) \\ R_m < r < R_r \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

式中: $\mathbf{M}_\theta$ 和 $\mathbf{M}_r$ 为永磁体剩余磁化强度的切向和径向分量的矩阵形式。本文采用径向充磁方式, 故在整个圆周 $0 \sim 2\pi$ 范围内可表示为

$$\mathbf{M}_\theta = \mathbf{0} \quad (40)$$

$$M_r(\theta) = \begin{cases} -\frac{B_r}{\mu_0}, & \gamma_k - \theta_{\text{sr}} - \frac{3}{2}\theta_{\text{mr}} \leq \theta \leq \gamma_k - \theta_{\text{sr}} - \frac{\theta_{\text{mr}}}{2} \\ 0, & \gamma_k - \theta_{\text{sr}} - \frac{\theta_{\text{mr}}}{2} \leq \theta \leq \gamma_k - \frac{\theta_{\text{mr}}}{2} \\ \frac{B_r}{\mu_0}, & \gamma_k - \frac{\theta_{\text{mr}}}{2} \leq \theta \leq \gamma_k + \frac{\theta_{\text{mr}}}{2} \\ 0, & \gamma_k + \frac{\theta_{\text{mr}}}{2} \leq \theta \leq \gamma_k + \theta_{\text{sr}} + \frac{\theta_{\text{mr}}}{2} \end{cases} \quad (41)$$

永磁体剩余磁化强度的径向分量的复数形式的傅里叶级数为

$$M_r(\theta) = \sum_{n=-N}^N \hat{M}_{r,n} e^{-jn\theta} \quad (42)$$

傅里叶系数 $\hat{M}_{r,n}$ 可以表示为

$$\hat{M}_{r,n} = \begin{cases} \sum_{k=1}^p \frac{1}{2jn\pi} \frac{B_r}{\mu_0} \left[e^{-jn(\theta_{sr} + \frac{\theta_{mr}}{2})} (e^{-jn\theta_{mr}} - 1) + \right. \\ \left. 2j\sin\left(\frac{n\theta_{mr}}{2}\right) \right] e^{jny_k}, & n \neq 0 \\ 0, & n = 0 \end{cases} \quad (43)$$

则式(39)可表示成

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial^2 \mathbf{A}_z^{\text{III}}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \mathbf{A}_z^{\text{III}}}{\partial r} - \frac{\mathbf{K}^2}{r^2} \mathbf{A}_z^{\text{III}} &= -\frac{j\mu_0}{r} \mathbf{KM}_r \\ R_m < r < R_r \end{aligned} \right\} \quad (44)$$

式中 $\mathbf{M}_r$ 是由系数 $\hat{M}_{r,n}$ 组成的列向量

$$\mathbf{M}_r = [\hat{M}_{r,-N}, \dots, \hat{M}_{r,N}]^T \quad (45)$$

方程(44)的通解可以表示成

$$\mathbf{A}_z^{\text{III}} = \left(\frac{r}{R_r}\right)^{\lambda^{\text{III}}} \mathbf{a}^{\text{III}} + \left(\frac{R_m}{r}\right)^{\lambda^{\text{III}}} \mathbf{b}^{\text{III}} + r\mathbf{F}^{\text{III}} \quad (46)$$

式中: $\lambda^{\text{III}} = \sqrt{\mathbf{K}^2} = |\mathbf{K}|$; $\mathbf{a}^{\text{III}}$ 和 $\mathbf{b}^{\text{III}}$ 为谐波系数矩阵; $\mathbf{F}^{\text{III}}$ 为方程(44)的特解

$$\mathbf{F}^{\text{III}} = -j\mu_0 (\mathbf{K}^{-1} - \mathbf{K})^{-1} \mathbf{M}_r \quad (47)$$

各求解域的径向磁密矩阵 $\mathbf{B}_r$ 、切向磁密矩阵 $\mathbf{B}_\theta$ 、径向磁场强度矩阵 $\mathbf{H}_r$ 和切向磁场强度矩阵 $\mathbf{H}_\theta$ 的表示形式在附录中给出。

3.4 边界条件

轮毂电机磁场求解域由上述 3 种不同子域组成,在不同子域交界面法向磁通密度和切向磁场强度具有连续性,如下式

$$\mathbf{A}_z^{\text{I}} \Big|_{R_s} = \mathbf{A}_z^{\text{II}} \Big|_{R_s} \quad (48)$$

$$\mathbf{A}_z^{\text{II}} \Big|_{R_m} = \mathbf{A}_z^{\text{III}} \Big|_{R_m} \quad (49)$$

$$\mathbf{H}_\theta^{\text{I}} \Big|_{R_s} = \mathbf{H}_\theta^{\text{II}} \Big|_{R_s} \quad (50)$$

$$\mathbf{H}_\theta^{\text{II}} \Big|_{R_m} = \mathbf{H}_\theta^{\text{III}} \Big|_{R_m} \quad (51)$$

另外,由于假设转子轭和定子轭材料磁导率为无穷大,所以边界面切向磁场强度为

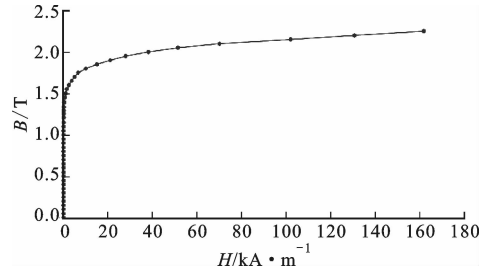
$$\mathbf{H}_\theta^{\text{I}} \Big|_{R_1} = \mathbf{H}_\theta^{\text{III}} \Big|_{R_r} = \mathbf{0} \quad (52)$$

根据 6 个边界条件,可以求解各子域通解中的谐波系数。求解矩阵在附录中给出。

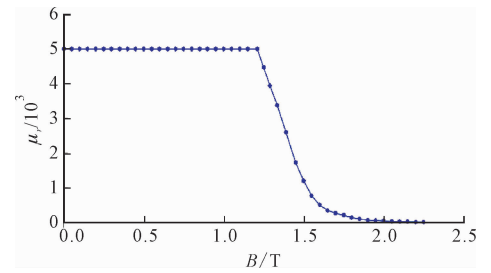
4 非线性求解算法

永磁电机在工作时主要在定子齿存在磁饱和的情况下,所以本文仅讨论定子齿部的磁导率变化情

况,图 2a 是用于非线性分析的定子铁磁材料 $B-H$ 曲线,为了方便进行迭代运算,对导磁材料的线性不饱和区进行了简化。通过大量的研究发现,当该导磁材料的相对磁导率大于 5 000 后电磁性能基本没有变化,故假设线性不饱和区域的相对磁导率为 5 000。再根据公式 $\mu_r = \frac{B}{H\mu_0}$,可以求解出磁感应强度 B 和相对磁导率 μ_r 的关系,图 2b 为 μ_r-B 的非线性关系图。



(a) $B-H$ 曲线



(b) μ_r-B 曲线

图 2 用于非线性分析的定子齿材料特性

利用迭代的方法去估算永磁电机中定子齿的饱和状态,为了保证计算精度,缩短计算时间,规定当迭代之后每个齿上相对磁导率的误差小于 10% 时完成迭代计算,迭代流程如图 3 所示,当误差不能满足条件时,需要对误差最大的齿上的相对磁导率进行误差纠正,纠正方式如图 3 所示,纠正完毕之后代入

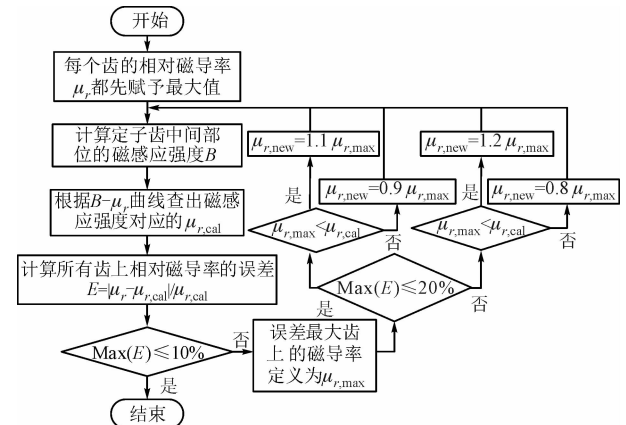


图 3 计算齿上相对磁导率的流程图

新的相对磁导率继续进入循环计算和判断,直到所有齿上的误差都满足条件,得到每个齿上的相对磁导率。

5 磁场解析计算与验证

5.1 样机参数

为验证上述解析模型的正确性,对一台 32 极 48 槽的车用永磁轮毂电机进行磁场解析计算,其主要参数见表 1。

表 1 电机主要参数

参数	数值	参数	数值
定子齿数 Q_s	48	定子轭半径 R_l/mm	105.3
极对数 p	16	定子齿半径 R_s/mm	142.3
定子齿宽 $\theta_{ts}/(^{\circ})$	3.75	气隙长度 g/mm	1.2
定子槽宽 $\theta_{ss}/(^{\circ})$	3.75	永磁体内径 R_m/mm	143.5
线圈宽度 $d/(^{\circ})$	1.125	永磁体外径 R_r/mm	149.5
剩磁密度 B_{r0}/T	1.2	铁心长度 L_u/mm	40
电流峰值 I/A	30	单侧线圈导体数 N_g	20

为了验证解析模型的正确性,利用 Ansoft 有限元软件建立非线性有限元模型,有限元模型如图 4 所示,Ⅰ区为空载工况下的电机磁感应强度云图,Ⅱ区为电枢工况下的电机磁感应强度云图,Ⅲ区为负载工况下的电机磁感应强度云图,Ⅳ区为 Ansoft 有限元软件中电机原始的二维模型图。通过 Matlab 编程建立非线性解析模型,为保证其计算的准确性,谐波次数的选取十分关键,本文经过大量的研究发现谐波次数选取 300 时计算精度与有限元法吻合得已经很好,而谐波次数高于 300 时计算精度没有显著提升,但是计算时间大大增加,所以综合考虑选取谐波次数范围为 $-300 \leq n \leq 300$ 。

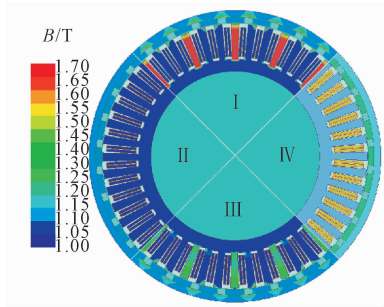


图 4 有限元模型

5.2 空载气隙磁通密度

为了验证解析模型的准确性,首先对比空载工况下解析模型与有限元法计算出的气隙磁感应强度。图 5 给出了 $\phi=0$ 、定子齿中间位置 $R_h=(R_l +$

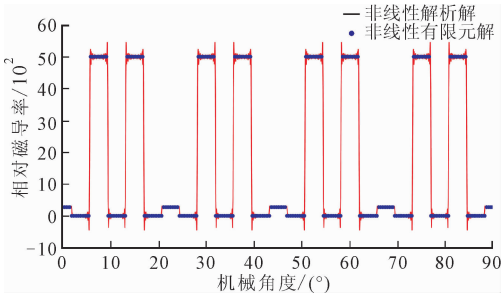
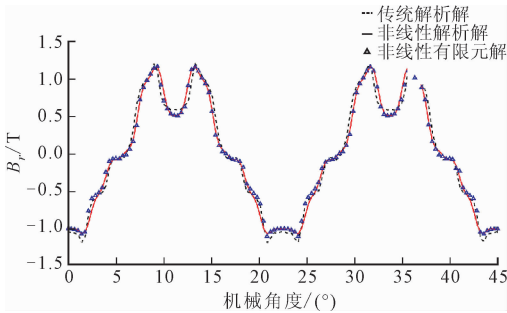
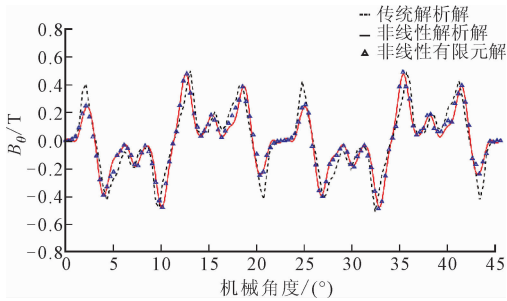


图 5 空载工况下 $\phi=0$ 时 I 域中间的磁导率分布

$R_s)/2$ 处的相对磁导率分布图,可以看出有部分齿处于磁饱和状态,且解析计算结果与有限元法结果吻合的较好。图 5 中峰值处的毛刺是由于绘图方式采用了复数域傅里叶级数展开而产生的固有现象,与解析计算精度无关。图 6 给出了气隙中心位置 $R_0=(R_m+R_s)/2$ 的磁场分布有限元解和解析解对比图。从图 6 可以看出,非线性解析解和非线性有限元解的吻合度很好,证明了解析模型的正确性。由于忽略了磁阻的影响,传统假设导磁材料磁导率为无穷大的解析计算结果尖峰处的数值较高。



(a) 径向分量



(b) 切向分量

图 6 空载工况下气隙径向和切向磁感应强度

5.3 电枢气隙磁通密度

电枢工况是指不考虑永磁体产生的磁场,仅考虑电枢绕组通电而产生磁场的工况,分析电枢磁场的气隙磁密分布可以判断绕组布线是否合理。

图 7 是电枢工况下 $\phi=0$ 位置处,剩磁 $B_r=0$,电枢电流为 30 A 时定子齿中间部位相对磁导率的

分布图,可以发现由于电枢产生的磁场强度较小,定子导磁材料均处于线性不饱和状态。图8是电枢气隙磁感应强度的有限元解和解析解对比图,可以发现非线性解析解与非线性有限元解吻合很好,证明了解析模型的正确性。由于电枢磁场较小,磁阻对磁场的影响不明显,所以传统解析法计算结果与非线性计算结果相差不大。

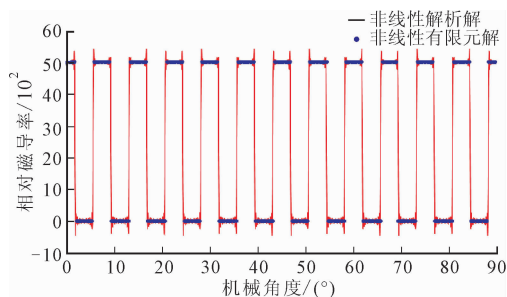
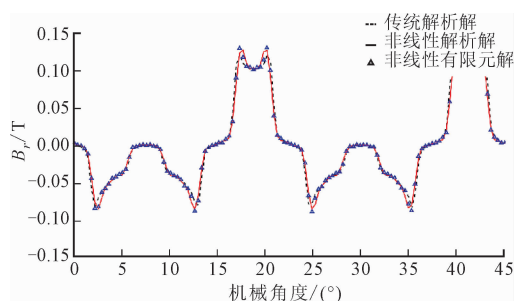
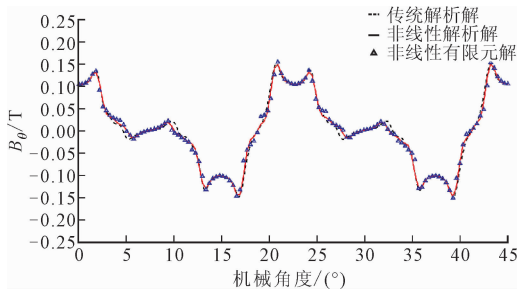


图7 电枢工况下 $\phi=0$ 时 I 域中间的磁导率分布



(a) 径向分量



(b) 切向分量

图8 电枢工况下气隙径向和切向磁感应强度

5.4 负载气隙磁通密度

图9是负载工况下 $\phi=0$ 位置处,电枢电流为30 A时定子齿中间部位相对磁导率的分布图,可以看出在某些齿上由于计算精度的原因并没有完全吻合,但是误差最大约为3%,满足误差要求。图10给出了负载工况下气隙磁感应强度的有限元解和解析解的对比图,可以发现,非线性解析解与有限元解吻合的很好,有些峰值部分有差别是因为有限元径向磁导率分布不均匀导致的,而传统假设磁导率为无穷大的解析计算结果由于没有考虑到磁阻的原

因,所求解的磁场与非线性有限元结果有较大的差异。

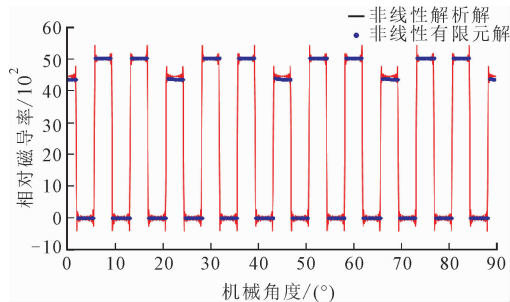
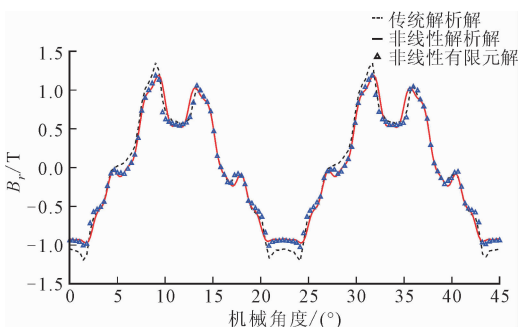
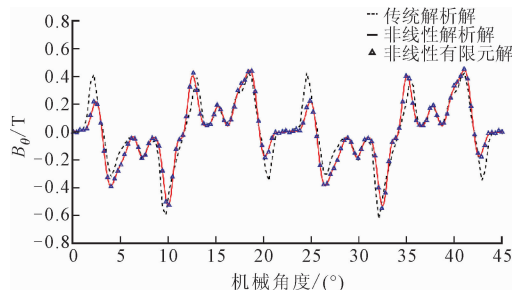


图9 负载工况下 $\phi=0$ 时 I 域中间的磁导率分布



(a) 径向分量



(b) 切向分量

图10 负载工况下气隙径向和切向磁感应强度

5.5 输出转矩

准确计算电机的输出转矩是电机设计的关键环节,本文在该解析模型的基础上采用麦克斯韦张量法计算电机的输出转矩,积分路径选取气隙域的中间位置 R_0 处,输出转矩计算式为

$$T = \frac{L_u R_0^2}{\mu_0} \int_0^{2\pi} B_r^{\text{II}}(R_0, \theta) B_\theta^{\text{II}}(R_0, \theta) d\theta \quad (53)$$

图11给出了电机输出转矩非线性解析解、非线性有限元解和传统解析解的对比图,可以看出非线性解析解与有限元法结果吻合得较好,证明了该方法的正确性,而传统解析法由于没有考虑到磁阻的影响,计算得到的输出转矩平均值(T_{avg})高于有限元和非线性解析计算结果,且传统解析法计算得到的转矩波动比另外两种方法的结果小,说明不考虑

导磁材料磁导率的传统解析法计算精度不高。

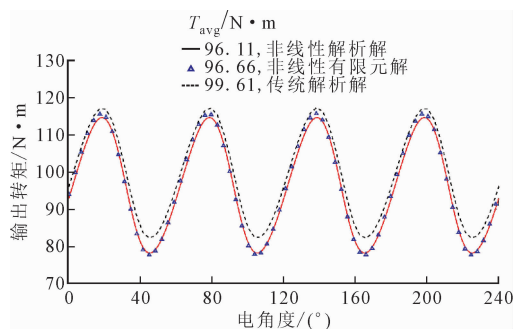


图 11 电机输出转矩

6 小 结

本文提出一种永磁轮毂电机的磁场非线性解析建模方法,解决了传统解析法将导磁材料磁导率假设为无穷大的问题。在建模过程中考虑了导磁材料 $B-H$ 曲线的非线性特点、利用迭代算法能够较为精确地求解出任意时刻定子齿部的相对磁导率分布,判断各齿上的磁饱和情况。通过计算对比电机空载磁场、电枢磁场和负载磁场下的气隙磁密分布,证明了该方法较传统解析法具有更好的准确性。在此基础上利用麦克斯韦张量法计算了电机的输出转矩,对比发现考虑导磁材料非线性变化的计算结果与有限元结果吻合的很好,而传统假设导磁材料为无穷大的解析法的计算结果偏大、精度偏低,说明导磁材料磁导率对电机的电磁性能有很大的影响。

参考文献:

- [1] CHENG M, SUN L, BUJA G. Advanced electrical machines and machine-based systems for electric and hybrid vehicles [J]. *Energies*, 2015, 8(9): 9541-9564.
- [2] 仇志坚, 李琛, 周晓燕, 等. 表贴式永磁电机转子偏心空载气隙磁场解析 [J]. *电工技术学报*, 2013, 28(3): 114-121.
QIU Zhijian, LI Chen, ZHOU Xiaoyan, et al. Analytical calculation of no-load air-gap magnetic field in surface-mounted permanent magnet motors with rotor eccentricity [J]. *Transactions of China Electrotechnical Society*, 2013, 28(3): 114-121.
- [3] 郭思源, 周理兵, 曲荣海, 等. 基于精确子域模型的游标永磁电机解析磁场计算 [J]. *中国电机工程学报*, 2013, 33(30): 71-80.
GUO Siyuan, ZHOU Libing, QU Ronghai, et al. Analytical magnetic field calculation of vernier permanent-magnet machines based on accurate subdomain model [J]. *Proceedings of the CSEE*, 2013, 33(30): 71-80.
- [4] 李琛, 章跃进, 仇志坚. 无轴承交替极永磁电机空载气隙磁场全局解析模型 [J]. *电工技术学报*, 2012, 27(11): 104-110.
LI Chen, ZHANG Yuejin, QIU Zhijian. Exact analytical model for the no-load air-gap magnetic field calculation in consequent-pole permanent magnet bearingless motor [J]. *Transactions of China Electrotechnical Society*, 2012, 27(11): 104-110.
- [5] ZARKO D, BAN D, LIPO T A, et al. Analytical calculation of magnetic field distribution in the slotted air gap of a surface permanent-magnet motor using complex relative air-gap permeance [J]. *IEEE Transactions on Magnetics*, 2006, 42(7): 1828-1837.
- [6] ZARKO D, BAN D, LIPO T A. Analytical solution for cogging torque in surface permanent-magnet motors using conformal mapping [J]. *IEEE Transactions on Magnetics*, 2008, 44(1): 52-65.
- [7] ZARKO D, BAN D, LIPO T A. Analytical solution for electromagnetic torque in surface permanent-magnet motors using conformal mapping [J]. *IEEE Transactions on Magnetics*, 2009, 45(7): 2943-2954.
- [8] ZHU Z Q, WU L J, XIA Z P. An accurate subdomain model for magnetic field computation in slotted surface-mounted permanent-magnet machines [J]. *IEEE Transactions on Magnetics*, 2010, 46(4): 1100-1115.
- [9] WU L J, ZHU Z Q, STATON D. An improved subdomain model for predicting magnetic field of surface-mounted permanent magnet machines accounting for tooth-tips [J]. *IEEE Transactions on Magnetics*, 2011, 47(6): 1693-1704.
- [10] WU L J, ZHU Z Q, STATON D, et al. Comparison of analytical models of cogging torque in surface-mounted PM machines [J]. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2012, 59(6): 2414-2425.
- [11] 郭思源, 周理兵. 表面埋入式永磁电机磁场解析 [J]. *中国电机工程学报*, 2015, 35(3): 710-718.
GUO Siyuan, ZHOU Libing. Analytical solution of magnetic field in surface-inset permanent magnet machines [J]. *Proceedings of the CSEE*, 2015, 35(3): 710-718.
- [12] 杨金歌, 邓兆祥. 车用永磁轮毂电机解析建模与齿槽转矩削弱 [J]. *西安交通大学学报*, 2017, 51(1): 84-91.
YANG Jing, DENG Zhaoxiang. Analytical modeling and cogging torque weakening of permanent magnet in-wheel motor for electric vehicles [J]. *Journal of Xi'an Jiaotong University*, 2017, 51(1): 10-19.

- [13] WU L J, LI Zhaokai, HUANG Xiaoyan. A hybrid field model for open-circuit field prediction in surface-mounted PM machines considering saturation [J]. IEEE Transactions on Magnetics, 2018, 54(6): 1-12.
- [14] LAZHAR R, KAMEL B. New subdomain technique for electromagnetic performances calculation in radial-flux electrical machines considering finite soft-magnetic material permeability [J]. IEEE Transactions on Magnetics, 2018, 54(4): 1-15.
- [15] SPRANGERS R L J, PAULIDES J J H, GYSEN B L J. Magnetic saturation in semi-analytical harmonic modeling for electric machine analysis [J]. IEEE Transactions on Magnetics, 2016, 52(2): 1-10.
- [16] DJELLOUL-KHEDDA Z, BOUGHRARA K, DUBAS F, et al. Nonlinear analytical prediction of magnetic field and electromagnetic performances in switched reluctance machines [J]. IEEE Transactions on Magnetics, 2017, 53(7): 1-11.

附录 A

(1) 48 槽 32 极永磁电机定子线圈的分布矩阵

$$\mathbf{C}_1^1 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A1})$$

$$\mathbf{C}_1 = [\mathbf{C}_1^1 \quad \mathbf{C}_1^1 \quad \cdots \quad \mathbf{C}_1^1 \quad \mathbf{C}_1^1]_{1 \times 16} \quad (\text{A2})$$

$$\mathbf{C}_2^1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A3})$$

$$\mathbf{C}_2 = [\mathbf{C}_2^1 \quad \mathbf{C}_2^1 \quad \cdots \quad \mathbf{C}_2^1 \quad \mathbf{C}_2^1]_{1 \times 16} \quad (\text{A4})$$

(2) 各域的磁感应强度矩阵和磁场强度矩阵

$$\mathbf{B}_r^1 = -j \frac{1}{r} \mathbf{K} \left[\mathbf{W}^1 \left(\frac{r}{R_s} \right)^{\lambda^1} \mathbf{a}^1 + \mathbf{W}^1 \left(\frac{R_1}{r} \right)^{\lambda^1} \mathbf{b}^1 + \mathbf{F}^1 r^2 \right] \quad (\text{A5})$$

$$\mathbf{B}_\theta^1 = -\frac{1}{r} \left[\mathbf{W}^1 \lambda^1 \left(\frac{r}{R_s} \right)^{\lambda^1} \mathbf{a}^1 - \mathbf{W}^1 \lambda^1 \left(\frac{R_1}{r} \right)^{\lambda^1} \mathbf{b}^1 + \mathbf{F}^1 r^2 \right] \quad (\text{A6})$$

$$\mathbf{B}_r^{\text{II}} = -j \frac{1}{r} \mathbf{K} \left[\left(\frac{r}{R_m} \right)^{\lambda^{\text{II}}} \mathbf{a}^{\text{II}} + \left(\frac{R_s}{r} \right)^{\lambda^{\text{II}}} \mathbf{b}^{\text{II}} \right] \quad (\text{A7})$$

$$\mathbf{B}_\theta^{\text{II}} = -\frac{1}{r} \left[\lambda^{\text{II}} \left(\frac{r}{R_m} \right)^{\lambda^{\text{II}}} \mathbf{a}^{\text{II}} - \lambda^{\text{II}} \left(\frac{R_s}{r} \right)^{\lambda^{\text{II}}} \mathbf{b}^{\text{II}} \right] \quad (\text{A8})$$

$$\mathbf{B}_r^{\text{III}} = -j \frac{1}{r} \mathbf{K} \left[\left(\frac{r}{R_r} \right)^{\lambda^{\text{III}}} \mathbf{a}^{\text{III}} + \left(\frac{R_m}{r} \right)^{\lambda^{\text{III}}} \mathbf{b}^{\text{III}} + r \mathbf{F}^{\text{III}} \right] \quad (\text{A9})$$

$$\mathbf{B}_\theta^{\text{III}} = -\frac{1}{r} \left[\lambda^{\text{III}} \left(\frac{r}{R_r} \right)^{\lambda^{\text{III}}} \mathbf{a}^{\text{III}} - \lambda^{\text{III}} \left(\frac{R_m}{r} \right)^{\lambda^{\text{III}}} \mathbf{b}^{\text{III}} + r \mathbf{F}^{\text{III}} \right] \quad (\text{A10})$$

$$\mathbf{H}_r^{1, \text{II}} = [\mu_{c,r}^{1, \text{II}}]^{-1} \mathbf{B}_r^{1, \text{II}} \quad (\text{A11})$$

$$\mathbf{H}_\theta^{1, \text{II}} = [\mu_{c,\theta}^{1, \text{II}}]^{-1} \mathbf{B}_\theta^{1, \text{II}} \quad (\text{A12})$$

$$\mathbf{H}_r^{\text{III}} = [\mu_{c,r}^{\text{III}}]^{-1} \mathbf{B}_r^{\text{III}} - \mathbf{M}_r \quad (\text{A13})$$

$$\mathbf{H}_\theta^{\text{III}} = [\mu_{c,\theta}^{\text{III}}]^{-1} \mathbf{B}_\theta^{\text{III}} - \mathbf{M}_\theta \quad (\text{A14})$$

$$\mu_{c,r}^{\text{II}} = \mu_{c,r}^{\text{III}} = \mu_{c,\theta}^{\text{II}} = \mu_{c,\theta}^{\text{III}} = \mu_0 \quad (\text{A15})$$

(3) 根据边界条件求解各域的谐波系数

$$\begin{bmatrix} \mathbf{a}^1 \\ \mathbf{b}^1 \\ \mathbf{a}^{\text{II}} \\ \mathbf{b}^{\text{II}} \\ \mathbf{a}^{\text{III}} \\ \mathbf{b}^{\text{III}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_{11} & \mathbf{X}_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{X}_{21} & \mathbf{X}_{22} & \mathbf{X}_{23} & \mathbf{X}_{24} & 0 & 0 \\ \mathbf{X}_{31} & \mathbf{X}_{32} & \mathbf{X}_{33} & \mathbf{X}_{34} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{X}_{43} & \mathbf{X}_{44} & \mathbf{X}_{45} & \mathbf{X}_{46} \\ 0 & 0 & \mathbf{X}_{53} & \mathbf{X}_{54} & \mathbf{X}_{55} & \mathbf{X}_{56} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{X}_{65} & \mathbf{X}_{66} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_1 \\ \mathbf{Y}_2 \\ \mathbf{Y}_3 \\ \mathbf{Y}_4 \\ \mathbf{Y}_5 \\ \mathbf{Y}_6 \end{bmatrix} \quad (\text{A16})$$

[本刊相关文献链接]

刘洋,左曙光,邓文哲.含辅助槽轴向永磁电机的电磁力波分析及抑制. 2019,53(1):77-85. [doi:10.7652/xjtuxb201901010]

左曙光,张耀丹,阎礁,等.考虑定子各向异性的永磁同步电机振动噪声优化. 2017,51(5):60-68. [doi:10.7652/xjtuxb201705010]

宋保维,李玉凯,程博.集成电机推进器用无刷直流电机齿槽转矩削减新方法. 2016,50(5):151-156. [doi:10.7652/xjtuxb201605023]

左曙光,张耀丹,钟鸿敏,等.爪极发电机转子结构对电磁力谐波和振动噪声的影响分析. 2018,52(3):111-118. [doi:10.7652/xjtuxb201803015]

郭伟,王跃,李宁.永磁同步电机飞轮储能系统充放电控制策略. 2014,48(10):60-65. [doi:10.7652/xjtuxb201410010]

丁树业,刘书齐,毕刘新,等.矢量控制下永磁同步电机的损耗分析. 2013,47(12):95-101. [doi:10.7652/xjtuxb201312017]

何栋炜,彭侠夫,蒋学程,等.永磁同步电机的改进扩展卡尔曼滤波测速算法. 2011,45(10):59-64. [doi:10.7652/xjtuxb201110011]

(编辑 武红江)