

DOI: 10.7652/xjtuxb201407021

最小二乘等几何分析的多重网格方法

陈德祥¹, 窦柏通¹, 徐自力¹, 胡哺松²

(1. 西安交通大学机械结构强度与振动国家重点实验室, 710049, 西安;

2. 长动集团武汉汽轮发电机有限公司, 430074, 武汉)

摘要: 针对最小二乘等几何分析得到的代数方程系数矩阵的条件数大、迭代求解成本高的问题, 提出了求解该方程的多重网格法。该方法在密网格上进行误差光顺, 使高频误差快速衰减, 在疏网格上进行误差修正, 使低频误差快速衰减。通过节点插入算法自动生成不同尺寸的网格, 根据离散 B 样条建立网格转换矩阵。采用该方法求解了泊松方程, 对比了多重网格迭代与 Gauss-Seidel 迭代、PCG 迭代的收敛性, 结果表明 Gauss-Seidel 迭代收敛速度最慢, PCG 迭代收敛速度随着代数方程自由度的增加而变慢, 多重网格的收敛速度最快, 能够有效求解最小二乘等几何分析得到的代数方程, 解决了矩阵条件数过大的问题, 并且收敛速度与网格尺寸无关。

关键词: 多重网格; 最小二乘; 等几何分析; 迭代方法; 网格转换

中图分类号: O241.82; O357.1 **文献标志码:** A **文章编号:** 0253-987X(2014)07-0124-07

Multigrid Least Squares Isogeometric Analysis

CHEN Dexiang¹, DOU Baitong¹, XU Zili¹, HU Busong²

(1. State Key Laboratory for Strength and Vibration of Mechanical Structures, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China;

2. China Chang Jiang Energy Corportion Wuhan Turbine Generator Co. Ltd., Wuhan 430074, China)

Abstract: The coefficient matrix of linear equations arisen from least square isogeometric analysis has a large condition number, it is expensive to solve the equations iteratively. A multigrid method is proposed for such linear equations, where high frequency error is damped by smoothing on fined grid and low frequency error is damped by coarse grid correction, then multi-level grids are generated by knot insertion, and the grid transfer matrix is derived from discrete B-splines. Poisson equation is comparatively solved with the proposed method, and the results show that the multigrid method outperforms Gauss-Seidel and PCG methods in convergence rate, furthermore, the convergence rate is independent of the element size of the finest grid.

Keywords: multigrid; least squares; isogeometric analysis; iteration method; grid transfer

最小二乘有限元法是求解偏微分方程的一种数值方法, 所得到的系数矩阵总是对称正定的, 但需要引入新的独立变量将二阶方程转化为一阶方程^[1-2], 本文作者在文献[3]中提出了一种基于原始变量的最小二乘等几何分析方法, 最小二乘泛函直接从控制方程定义, 不引入任何附加独立变量。为满足对

基函数光滑性的要求, 采用非均匀有理 B 样条 (NURBS) 来构造有限元空间。该方法虽避免了最小二乘有限元由于引进新独立变量导致的自由度增加, 但基于二阶偏微分方程的最小二乘等几何分析方法得到的代数方程的系数矩阵的条件数^[4]。对单元尺寸为 h 的网格, 基于一阶偏微分方程的矩阵

收稿日期: 2013-11-27。 作者简介: 陈德祥(1979—), 男, 博士生; 徐自力(通信作者), 男, 教授, 博士生导师。 基金项目: 国家“973 计划”资助项目(2011CB706505)。

网络出版时间: 2014-04-25

网络出版地址: <http://www.cnki.net/kcms/detail/61.1069.T.20140425.0932.011.html>

条件数为 $O(h^{-2})$,而基于二阶偏微分方程的矩阵条件数为 $O(h^{-4})^{[5]}$ 。当线性方程的规模很大时无法用直接方法求解,需要采用迭代求解,常用的求解线性方程的迭代算法包括 Richardson 型迭代和 Krylov 子空间型迭代。这些迭代方法的收敛速度取决于矩阵的条件数,条件数越大收敛速度越慢^[6],用这些方法对最小二乘等几何分析的代数方程进行迭代求解的计算成本高。

多重网格方法是目前所知的最高效的迭代算法,其基本思想是在密网格上进行光滑,去掉高频误差,在疏网格上进行误差修正,去掉低频误差^[7]。该方法在有限容积法^[8-9]、有限差分法^[7,10]和有限元方法^[11]中的研究较多,在等几何分析中的研究较少,仅 Gahleitner 等在 2013 年进行了一些研究^[12],但只考虑了采用 Galerkin 变分的情况,没有讨论采用最小二乘变分的情况,也没有给出生成网格转换矩阵的方法。

本文建立了一种适用于最小二乘等几何分析的多重网格方法。要实现多重网格迭代,其中的两个关键是如何生成不同尺寸的网格以及在网格之间进行转换,本文利用节点插入算法生成不同尺寸的网格^[3,13],通过离散 B 样条建立网格转换矩阵。最后,用该方法与 Gauss-Seidel 迭代、PCG 迭代分别求解了泊松方程,并将各个迭代算法的收敛性进行了对比,其中多重网格方法的收敛速度最快,能高效求解最小二乘等几何分析所得到的代数方程。

1 最小二乘等几何分析基本原理

最小二乘等几何分析是求解偏微分方程的数值方法,它通过最小二乘泛函建立变分方程,用 NURBS 构造有限维空间。本文以泊松方程为模型问题进行研究,考虑如下带非齐次 Dirichlet 边界的泊松方程

$$\begin{cases} \Delta u(x) = f & x \in \Omega \\ u(x) = g & x \in \Gamma \end{cases} \quad (1)$$

式中: u 是待求的未知函数; Ω 是二维或三维的计算区域; Γ 是计算区域的边界; x 是计算区域中的点; f 和 g 是给定的函数。

用方程(1)的余量定义最小二乘泛函

$$J = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\Delta u - f)^2 dx \quad (2)$$

取函数空间 $U = \{u \mid u \in H^2(\Omega), u|_{\Gamma} = g\}$, $H^2(\Omega)$ 为标准 Sobolev 空间,则方程(1)的解使 J 在 U 上取最小值,求解方程(1)等价于求 J 的最小点。

J 是凸的二次泛函,求 J 的最小点又等价于求如下变分问题。

求 $u \in U$ 满足

$$\int_{\Omega} \Delta u \Delta v dx = \int_{\Omega} f \Delta v dx \quad \forall v \in U \quad (3)$$

上述变分问题限制在 U 的有限维子空间 U^h 上,即得到如下离散的变分问题。

求 $u^h \in U^h$ 满足

$$\int_{\Omega} \Delta u^h \Delta v^h dx = \int_{\Omega} f \Delta v^h dx \quad \forall v^h \in U^h \subset U \quad (4)$$

当 U^h 的一组基函数确定后,由式(4)可得如下线性方程组

$$\mathbf{A}^h \mathbf{u}^h = \mathbf{b}^h \quad (5)$$

式中: $\mathbf{A}^h$ 为刚度阵,具有对称正定性;上标 h 表示网格的单元尺寸, h 越小则网格越密。方程(5)可用 PCG 方法求解,但矩阵的条件数为 $O(h^{-4})$,PCG 迭代收敛速度慢。

变分问题(4)要求有限元空间 U^h 中的函数具有 C^1 光滑性,这样的空间可由 NURBS 构造,详细过程参见文献[3]。

2 求解代数方程的多重网格法

本节建立求解代数方程(5)的多重网格方法,该方法需要使用疏密不同的多组网格,并在不同网格之间进行转换。不同尺寸的网格在计算中通过节点插入自动生成,网格之间的转换矩阵根据离散 B 样条得到。

2.1 疏密网格生成

等几何分析的网格生成过程与传统有限元法不同,传统有限元法的网格由专门的程序模块对计算区域进行剖分得到,在生成网格的过程中通常需要人工参与,等几何分析中假定计算区域的几何形状由 NURBS 参数化方程描述,所需网格根据参数化方程自动生成^[3],自动化程度高,无需人工参与。

NURBS 参数化方程由控制点和节点向量定义,控制点是三维空间中的点,节点向量是一组非递减的实数序列。节点向量中的元素可以重复,它的非重复子向量决定了网格的分布。由描述几何形状的初始参数化方程得到的网格所包含的单元数少,是一组最疏的网格,计算中需要进行加密。网格加密只需要在节点向量中插入新的非重复节点即可,加密过程也通过节点插入算法自动实现^[14]。

由于等几何分析能自动生成网格并加密网格,多重网格中不同尺寸的网格可以很容易得到。以一

维为例,假设 $\{\xi_i\}$ 的非重复子向量为 $\{\xi'_i\}$,则插入节点 $\{(\xi'_i + \xi'_{i+1})/2\}$ 后网格均匀加密1倍。对二维和三维问题需同时在多个方向进行节点插入。

有限元网格对曲边区域只在足够密的情况下才能较好地近似,多重网格计算中网格疏化后存在空间离散误差。等几何分析中生成的网格即使最疏的网格在几何上也是精确的,多重网格计算中不会因网格的疏化产生空间离散误差。

2.2 网格转换矩阵

先研究一维情况,给定两组节点向量 $\{\xi_i^H\}$ 和 $\{\xi_j^h\}$,上标 H, h 分别表示与疏、密网格相关的量, $\{\xi_j^h\}$ 由 $\{\xi_i^H\}$ 节点插入得到。 $\{\xi_i^H\}$ 定义了 n 个B样条基函数 N_i^H , $\{\xi_j^h\}$ 定义了 n' 个B样条基函数 N_j^h ^[3],这两组B样条基函数满足如下线性变换关系^[15]

$$N_i^H = \sum_{j=1}^{n'} R_{i,j}^k N_j^h \quad (6)$$

式中: k 为B样条的阶数; $\mathbf{R}$ 为 $n \times n'$ 转换矩阵,它的行向量线性独立。 $R_{i,j}^r, r=1, \dots, k$ 对 r 满足如下递归关系

$$R_{i,j}^r = \omega_{i,j}^r R_{i,j}^{r-1} + (1 - \omega_{i+1,j}^r) R_{i+1,j}^{r-1} \quad (7)$$

$$\text{其中 } \omega_{i,j}^r = \begin{cases} \frac{\xi_{j+r-1}^h - \xi_i^H}{\xi_{i+r}^H - \xi_i^H} & \xi_i^H \neq \xi_{i+r}^H \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

$$R_{i,j}^1 = \begin{cases} 1 & \xi_i^H \leq \xi_j^h < \xi_{i+1}^H \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

$R_{i,j}^k$ 的递归关系与B样条基函数的定义类似,它的第 i 行是基函数 N_i^H 在点 $\{\xi_j^h\}_{j=k}^{n'+k-1}$ 的函数值,因此又称为离散B样条。由于 N_i^H 只在区间 $[\xi_i^H, \xi_{i+k}^H]$ 上大于0,在其他点上等于0,所以 $\mathbf{R}$ 为稀疏矩阵。由NURBS构造的有限元空间与B样条基函数满足同样的转换关系,取 $\mathbf{P}=\mathbf{R}^T$,则 $\mathbf{P}$ 和 $\mathbf{R}$ 分别是疏密网格之间的插值矩阵和限制矩阵,本文采用文献[15]中的算法来生成 $\mathbf{R}$,该算法充分利用了 $\mathbf{R}$ 的稀疏性来提高计算效率。

根据一维转换矩阵可以计算出二维和三维转换矩阵。以二维为例,假设疏网格的节点向量为 $\{\xi_i^H\}$ 和 $\{\eta_j^h\}$,它们分别定义了B样条基函数 $\{N_i^H(\xi)\}$ 和 $\{N_j^h(\eta)\}$,基函数数量分别为 n 和 m ;插入节点后得到密网格的节点向量为 $\{\xi'_i\}$ 和 $\{\eta'_j\}$,相应的基函数为 $\{N_i^h(\xi)\}$ 和 $\{N_j^h(\eta)\}$,数量为 n' 和 m' ; ξ 和 η 方向上的基函数转换矩阵分别为 $\hat{\mathbf{R}}$ 和 $\tilde{\mathbf{R}}$ 。

由式(6)可得二维B样条基函数的转换关系式

$$N_i^H(\xi) N_j^H(\eta) = \left(\sum_s \hat{R}_{i,s} N_s^h(\xi) \right) \left(\sum_t \tilde{R}_{j,t} N_t^h(\eta) \right) =$$

$$\sum_s \sum_t \hat{R}_{i,s} \tilde{R}_{j,t} N_s^h(\xi) N_t^h(\eta) \quad (8)$$

对疏密网格的自由度进行全局编号,则可得总体自由度的转换矩阵,它的元素为

$$R_{\alpha,\beta} = \hat{R}_{i,s} \tilde{R}_{j,t} \quad \alpha = i + (j-1)n; \beta = s + (t-1)n' \quad (9)$$

疏密网格上的向量转换通过网格转换矩阵实现

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{u}^H &= \mathbf{R} \mathbf{u}^h \\ \mathbf{u}^h &= \mathbf{P} \mathbf{u}^H \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

2.3 多重网格迭代

基于前面的疏密网格生成方法和网格转换矩阵,可以建立求解线性方程(5)的多重网格迭代。假设有两组网格,疏网格到密网格的转换矩阵为 $\mathbf{P}$,密网格到疏网格的转换矩阵为 $\mathbf{R}$,方程(5)是在密网格上通过最小二乘方法得到的。该方程可用加权Jacobi迭代、Gauss-Seidel迭代和SOR迭代等常用迭代方法求解,它们都属于Richardson型迭代,可统一写成

$$\mathbf{u}_{m+1}^h = (\mathbf{E} - \mathbf{B}^h \mathbf{A}^h) \mathbf{u}_m^h + \mathbf{B}^h \mathbf{b}^h \quad (11)$$

式中: $\mathbf{u}_m^h$ 是第 m 次迭代的近似解; $\mathbf{E}$ 是单位阵; $\mathbf{B}^h$ 是预处理矩阵。

线性方程组的误差 $\mathbf{e}_m^h = \mathbf{u}^h - \mathbf{u}_m^h$ 和余量 $\mathbf{r}_m^h = \mathbf{b}^h - \mathbf{A}^h \mathbf{u}_m^h$ 之间满足如下余量方程

$$\mathbf{A}^h \mathbf{e}_m^h = \mathbf{r}_m^h \quad (12)$$

采用Richardson型迭代求解线性方程组时,迭代过程中误差的高频分量衰减速度快,而低频分量衰减速度慢。随着迭代的进行,误差中的低频分量将占主导地位,并且难以衰减掉。因为低频分量变化缓慢,几何上较为光滑,所以可将Richardson型迭代看成一个误差光顺过程。

对高频误差分量需要用较密的网格才能正确反映其分布,但对光滑的低频误差,可以用较疏的网格。因此,当Richardson型迭代收敛速度降低时,可通过求解下面疏网格上的余量方程得到低频误差

$$\mathbf{A}^H \mathbf{e}_m^H = \mathbf{r}_m^H \quad (13)$$

式中: $\mathbf{A}^H, \mathbf{e}_m^H, \mathbf{r}_m^H$ 分别为疏网格上的刚度阵、误差和余量。疏网格上的误差和余量可根据转换关系方程(10)得到,刚度阵可通过在疏网格上用最小二乘方法得到,也可以通过多重网格的Galerkin条件得到

$$\mathbf{A}^H = \mathbf{R} \mathbf{A}^h \mathbf{P} \quad (14)$$

由于 $\mathbf{A}^h$ 是对称正定的,并且 $\mathbf{R}$ 是行满秩的,从式(14)得到的在疏网格上的刚度阵也是对称正定的。求得方程(13)的解后,将疏网格的误差转换到密网格上,根据误差的定义来修正当前的近似解 $\mathbf{u}_m^h$ 。修

正之后一般再进行一次光顺操作,以进一步降低高频误差。

总体上,多重网格迭代过程是在密网格上进行光顺来去掉高频误差,在疏网格上进行误差修正以去掉低频误差。如果疏网格的自由度已经很小,那么可以直接求解疏网格上的余量方程;如果疏网格的自由度仍然很大,那么对余量方程进行类似的光顺和修正过程,直到网格足够稀疏可以直接求解。

算法 1 给出了多重网格迭代过程的伪代码。假设有 l 重网格,第 $i+1$ 层网格是在第 i 层网格基础上通过节点插入得到的,该算法是从当前近似解 u_i^m 得到下一个近似解 u_i^{m+1} 的计算过程。算法中 A_l 为第 l 层网格下的刚度阵, R_l^{l-1} 为第 l 层到第 $l-1$ 层的转换矩阵, P_{l-1}^l 为第 $l-1$ 层到第 l 层的转换矩阵。 S^{μ_1} 表示进行 μ_1 次光顺,光顺过程为 Richardson 型迭代(如加权 Jacobi、Gauss-Seidel、SOR 迭代), μ_1 、 μ_2 一般取 1 或 2。

该算法是一个递归算法,其流程见图 1。如果第 l 层网格不是最疏的网格,该算法先进行 μ_1 次光顺运算得到近似解 u_i^{m+1} ,然后在 $l-1$ 层网格上求解余量方程并对 u_i^{m+1} 进行修正,最后进行 μ_2 次光顺运算。如果第 $l-1$ 层网格是最疏的网格,则用直接解法求解余量方程,否则调用 γ 次多重网格迭代求解余量方程。参数 γ 表示疏网格修正的迭代次数,它决定了访问各层网格的路径, $\gamma=1$ 为 V 型循环, $\gamma=2$ 为 W 型循环,当采用 4 层网格时,循环过程如图 2 所示。

算法 1: $u_i^{m+1} = \text{MG}(A_l, b_l, u_i^m, l, \gamma, \mu_1, \mu_2)$
IF $l=1$
 $u_i^{m+1} = A_l^{-1} b_l$
ELSE
 $u_i^{m+1} = S^{\mu_1}(A_l, b_l, u_i^m)$
 $r_{l-1} = R_l^{l-1}(b_l - A_l u_i^{m+1})$
 $e_{l-1} = \text{MG}^\gamma(R_l^{l-1} A_l P_{l-1}^l, r_{l-1}, 0, l-1, \gamma, \mu_1, \mu_2)$
 $u_i^{m+1} = u_i^{m+1} + P_{l-1}^l e_{l-1}$
 $u_i^{m+1} = S^{\mu_2}(A_l, b_l, u_i^{m+1})$
END

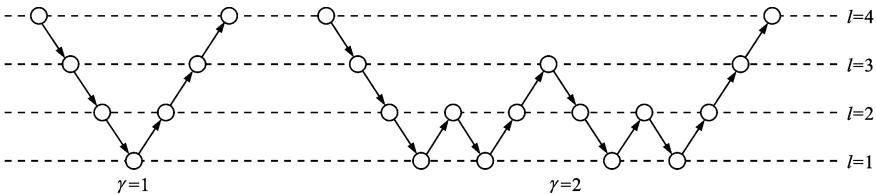


图 2 多重网格循环形式

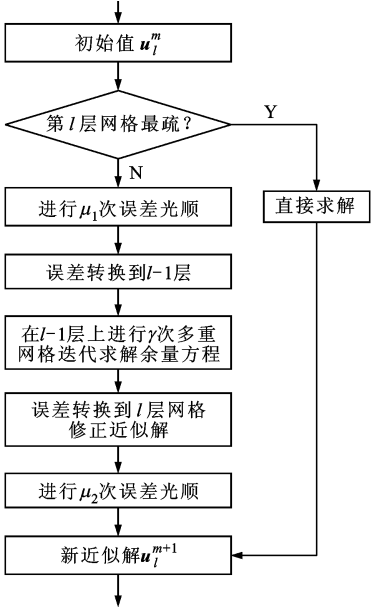
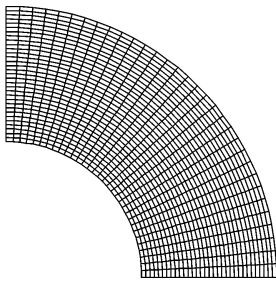


图 1 多重网格算法流程图

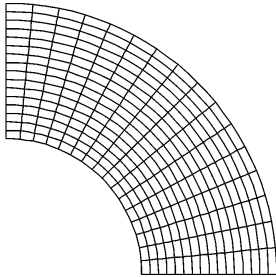
3 多重网格法的收敛性分析

分别用多重网格法和 Gauss-Seidel、PCG 迭代法求解区域 $\Omega = \{(x, y) | 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, x > 0, y > 0\}$ 上的泊松方程,该区域是第一象限中内径为 1、外径为 2 的圆环,取解析解为 $u = (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4)xy^2$,方程(1)的右端项及边界条件根据解析解给出。

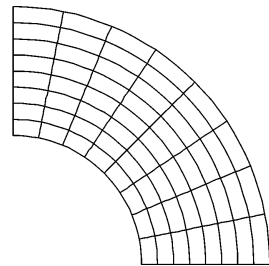
通过插入节点的方法将求解区域离散为 32×32 的网格(见图 3a),在该网格下线性方程组(5)的系数矩阵的条件数为 5.3×10^5 。本文采用了 4 层网格(见图 3)进行多重网格迭代,误差光顺采用对称 Gauss-Seidel 迭代,当相对误差小于 10^{-10} 时认为迭代收敛,迭代初始值取为 0。迭代收敛过程如图 4 所示,图中 $V(\mu_1, \mu_2)$ 、 $W(\mu_1, \mu_2)$ 为不同的循环形式, μ_1 、 μ_2 分别是前、后光顺运算的次数。从图中可以看出,整个迭代过程有两个阶段,初始阶段误差下降速度较快,然后逐渐变慢,最终趋于一个恒定的速度,图中表现为一条直线。初始阶段收敛较快是由于对称 Gauss-Seidel 迭代的误差光顺效果更为明显



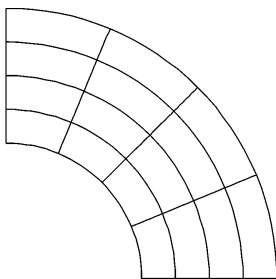
(a) 32×32 网格



(b) 16×16 网格



(c) 8×8 网格



(d) 4×4 网格

图3 多重网格迭代采用的4层网格

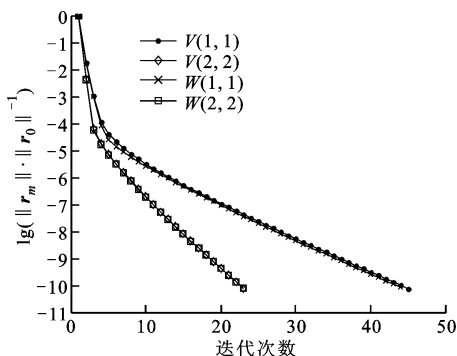


图4 多重网格迭代收敛过程

所导致的,随着迭代的进行光滑作用趋于恒定。不论是 V 型还是 W 型循环,增加光滑运算的次数可以提高收敛速度,但相应的每一次迭代的计算成本也会增加,一般取 1 或 2 就可以满足要求。W 型循环的收敛速度比 V 型要快,但两者差别不大,当光滑运算次数为 2 时,W 型和 V 型循环的收敛曲线几乎重合。

图 5 中对比了多重网格迭代和 Gauss-Seidel、PCG 迭代的收敛性,其中 PCG 迭代采用了对称 Gauss-Seidel 预处理矩阵,迭代收敛条件仍取为相对误差小于 10^{-10} 。从图中可以看出,多重网格迭代收敛速度最快,迭代 23 次后收敛。Gauss-Seidel 迭代刚开始时误差下降较快,但随着迭代的进行误差下降越来越慢,这是由于开始的时候高频误差衰减较快导致的,当高频误差充分衰减后低频误差为主要成分,迭代收敛速度变慢。多重网格方法中,在迭代变慢后适时转换到疏网格上求解余量方程,在密网格上光滑的误差在疏网格上变得不再光滑,这样使得 Gauss-Seidel 迭代在疏网格上仍然可以快速收敛。PCG 方法迭代 168 次后收敛,收敛速度比 Gauss-Seidel 方法快,但比多重网格方法慢。

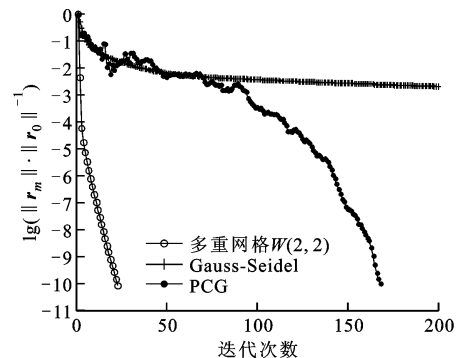
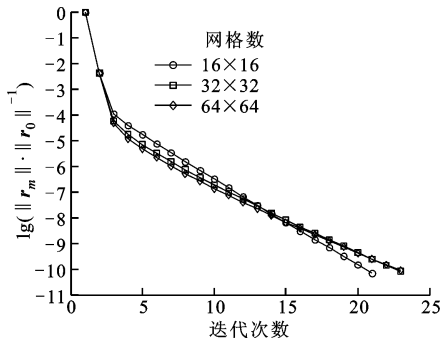
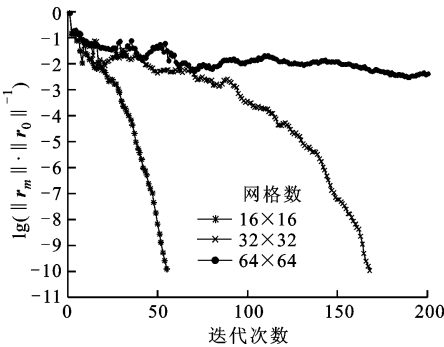


图5 多重网格迭代与 Gauss-Seidel、PCG 迭代的对比

多重网格相对于 PCG 的另一个优点是与最密网格的密度无关。最密网格的密度对迭代收敛速度的影响如图 6 所示,图中给出了 3 组不同密度下多重网格迭代和 PCG 迭代的收敛过程,图 6a 表明当网格密度增大时多重网格的收敛速度几乎不变,图 6b 表明网格密度对 PCG 迭代的收敛速度影响很大,收敛速度随着网格密度增大而明显降低,对 64×64 的网格迭代 200 次后仍未收敛。PCG 迭代变慢是由于系数矩阵条件数为 $O(h^{-4})$,网格密度增大系数矩阵的条件数也随之增大。实际计算中 PCG 的收敛速度取决于所采用的预处理矩阵,多重网格迭代也可用作预处理矩阵来提高 PCG 的效率。



(a)多重网格迭代



(b)PCG 迭代

图 6 最密网格的密度对迭代收敛速度的影响

取迭代收敛条件为相对误差小于 10^{-10} ,表 1 给出了相同收敛条件下多重网格方法和 PCG 方法所需的计算时间。本文的算法用 Matlab 语言编程实现,计算采用 Intel Core2 CPU,处理器频率为 2.33 GHz,表中所列时间是 10 次计算的均值。多重网格迭代中当网格密度为 8×8 时采用直接方法求解。从表中可以看出,当网格数较少时 PCG 方法用时少,当网格数较多时多重网格方法用时少。对多重网格方法,随着网格数增加总的迭代次数基本不变,迭代时间增加主要是由于自由度增多导致每一次迭代的计算量增加;对 PCG 方法,随着网格增多一方面每一次迭代的计算量增加,计算时间变长,另一方面总的迭代次数也成倍增加,导致网格加密一次总的计算时间增加一个数量级。因此,对大规模线性方程组多重网格方法的计算效率更高。

表 1 多重网格方法和 PCG 迭代的计算时间

网格数	多重网格		PCG	
	迭代次数	计算时间/s	迭代次数	计算时间/s
16×16	21	0.076	55	0.019
32×32	23	0.413	168	0.123
64×64	23	2.045	618	3.501
128×128	23	9.089	2 416	65.225

由以上的对比分析可知,当自由度数很大时,多重网格法比常规的迭代方法计算速度快,能够有效求解最小二乘等几何分析得到的代数方程,解决了矩阵条件数过大的问题。

4 结 论

最小二乘等几何分析的系数矩阵条件数大,常规迭代方法求解成本高,本文建立了一种适用于最小二乘等几何分析的多重网格迭代方法。该方法在密网格上进行误差光顺,使高频误差快速衰减;在疏网格上进行误差修正,使低频误差快速衰减;利用节点插入算法在计算过程中自动生成多重网格迭代所需的疏密网格;利用离散 B 样条建立了网格之间的转换矩阵。通过求解泊松方程对比了多重网格迭代与 Gauss-Seidel、PCG 迭代方法的收敛性,对比结果表明多重网格的收敛速度最快,并且收敛速度与最密网格的密度尺寸无关,因此多重网格方法是适用于最小二乘等几何分析的高效迭代方法。

参考文献:

[1] PRABHAKAR V, REDDY J N. A stress-based least-squares finite-element model for incompressible Navier-Stokes equations [J]. International Journal for Numerical Methods in Fluids, 2007, 54(11): 1369-1385.

[2] PONTAZA J P, REDDY J N. Least-squares finite element formulations for viscous incompressible and compressible fluid flows [J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2006, 195 (19/20/21/22): 2454-2494.

[3] 陈德祥,徐自力,刘石,等. 求解 Stokes 方程的最小二乘等几何分析方法 [J]. 西安交通大学学报, 2013, 47(5): 51-55.

CHEN Dexiang, XU Zili, LIU Shi, et al. Least squares isogeometric analysis for Stokes equation [J]. Journal of Xi'an Jiaotong University, 2013, 47(5): 51-55.

[4] BOCHEV P B, GUNZBURGER M D. Least-squares finite element methods [M]. New York, USA: Springer, 2009: 92-93.

[5] AZIZ A K, KELLOGG R B, STEPHENS A B. Least-squares methods for elliptic-systems [J]. Mathematics of Computation, 1985, 44(169): 53-70.

[6] SAAD Y. Iterative methods for sparse linear systems [M]. Philadelphia, USA: SIAM, 2003: 104-116.

[7] TROTTEBERG U, OOSTERLEE C W, SCHULLER A. Multigrid [M]. London, UK: Academic Press,

- 2000: 28-50.
- [8] 陶文铨. 计算传热学的近代进展 [M]. 北京: 科学出版社, 2000: 306-310.
- [9] KUMAR D S, KUMAR K S, DAS M K. A fine grid solution for a lid-driven cavity flow using multigrid method [J]. *Engineering Applications of Computational Fluid Mechanics*, 2009, 3(3): 336-354.
- [10] BRIGGS W L, HENSON V E, MCCORMICK S F. A multigrid tutorial [M]. Philadelphia, USA: SIAM, 2000: 7-27.
- [11] SAMPATH R S, BIROS G. A parallel geometric multigrid method for finite elements on octree meshes [J]. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 2010, 32(3): 1361-1392.
- [12] GAHALAUT K P S, KRAUS J K, TOMAR S K. Multigrid methods for isogeometric discretization [J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2013, 253: 413-425.
- [13] HUGHES T J R, COTTRELL J A, BAZILEVS Y. Isogeometric analysis: CAD, finite elements, NURBS, exact geometry and mesh refinement [J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2005, 194(39/40/41): 4135-4195.
- [14] PIEGL L A, TILLER W. The NURBS book [M]. New York, USA: Springer, 1997: 141-178.
- [15] COHEN E, LYCHE T, RIESENFELD R. Discrete B-splines and subdivision techniques in computer-aided geometric design and computer graphics [J]. *Computer Graphics and Image Processing*, 1980, 14(2): 87-111.

(编辑 荆树蓉)

(上接第33页)

参考文献:

- [1] 尧命发. “均质压燃、低温燃烧”新一代内燃机技术 [J]. *内燃机*, 2012, 4(2): 1-4.
- YAO Mingfa. New combustion technology on homogeneous charge compression ignition and low temperature combustion [J]. *Internal Combustion Engines*, 2012, 4(2): 1-4.
- [2] CORDINER S, GAMBINO M, IANNACCONE S, et al. Numerical and experimental analysis of combustion and exhaust emissions in a dual-fuel diesel/natural gas engine [J]. *Energy & Fuels*, 2008, 22(3): 1418-1424.
- [3] WEAVER C S, TURNER S H. Dual fuel natural gas/diesel engines: technology, performance, and emissions, SAE940548 [R]. Washington DC, USA: SAE, 1994.
- [4] SRINIVASAN K K, KRISHNAN S R, MIDKIFF K C. Improving low load combustion, stability, and emissions in pilot-ignited natural gas engines [J]. *Proc Inst Mech Eng: Part D Journal of Automobile Engineering*, 2006, 220(D): 229-239.
- [5] SRINIVASAN K K, KRISHNAN S R, SINGH S, et al. The advanced injection low pilot ignited natural gas engine: a combustion analysis [J]. *ASME Journal of Engineering Gas Turbines Power*, 2006, 128(1): 213-218.
- [6] HEYWOOD J B. Internal combustion engine fundamentals [M]. New York, USA: McGraw-Hill, 1988.
- [7] 林志强, 苏万华, 万国强. 柴油引燃天然气发动机着火特性及其影响因素的影响 [J]. *燃烧科学与技术*, 2003, 9(3): 234-238.
- LIN Zhiqiang, SU Wanhua, WANG Guoqiang. Study on characteristics of ignition and misfire in the diesel/natural gas dual fuel engine [J]. *Journal of Combustion Science and Technology*, 2003, 9(3): 234-238.
- [8] 林志强, 苏万华. 柴油引燃式天然气发动机最佳引燃柴油量及过量空气系数浓限、稀限的研究 [J]. *内燃机学报*, 2002, 2(6): 505-510.
- LIN Zhiqiang, SU Wanhua. A Study on determination of amount of pilot injection and rich and lean boundaries of premixed CNG/air mixture for a CNG/diesel dual fuel engine [J]. *Transactions of CSICE*, 2002, 20(6): 505-510.
- [9] YAO Chunde, YAO Guangtao, SONG Jin'ou, et al. A theoretical study on the realization of QHCCI in a pre-mixed natural gas engine ignited by pilot diesel fuel [J]. *Automotive Engineering*, 2005, 27(2): 168-171.

(编辑 苗凌)