

DOI: 10.7652/xjtuxb201303014

# 多状态系统的可能可靠性分析

庞煜, 黄洪钟, 刘宇, 何俐萍, 李彦锋

(电子科技大学机械电子工程学院, 611731, 成都)

**摘要:** 为进一步深入开展对系统的可能可靠性分析, 克服由系统状态可能性分布难以获取、使基于可能性理论的系统可靠性分析停留在初级阶段的问题, 引入最大可能剩余寿命来表征系统状态与剩余寿命之间的内在函数关系。将系统状态对应的最大可能剩余寿命定义为该状态下系统保有最大可能剩余的寿命时间, 通过最大可能剩余寿命建立了系统状态可能性分布与系统寿命可能性分布之间的关系, 同时引入系统状态变化的观测时刻, 它是联系系统状态与对应的最大可能剩余寿命之间的函数关系变量, 重新定义了多状态系统的可能可靠性函数。进而, 利用系统寿命的可能性分布, 避开难以入手的系统状态可能性分布, 实现了对系统可能可靠性的分析, 得到了系统可能可靠性的计算方法。

**关键词:** 多状态系统; 可能性分布; 最大可能剩余寿命

**中图分类号:** TB114.3 **文献标志码:** A **文章编号:** 0253-987X(2013)03-0075-05

## Possibility Theory Based Multi-State System Reliability Analysis

PANG Yu, HUANG Hongzhong, LIU Yu, HE Liping, LI Yanfeng

(School of Mechatronics Engineering, University of Electronic Science and Technology of China, Chengdu 611731, China)

**Abstract:** Due to the discreteness of system state, it is difficult to obtain the system state possibility distribution, thus the possibility theory based system reliability analysis stays at an elementary stage. To deal with the system state possibility distribution and more accurately analyze the system possibilistic reliability, state corresponding most possible residual lifetime (MPRL) is introduced to express the internal functional relationship between system state and residual lifetime. The MPRL is defined as the system most possible remaining lifetime under this state, which connects the system state possibility distribution with system lifetime possibility distribution. The variable at investigating moment is introduced to link the system state and corresponding most possible residual lifetime, then the possibilistic reliability function of multi-state system is redefined. The system possibilistic reliability analysis can be realized with system lifetime possibility distribution instead of state possibility distribution.

**Keywords:** multi-state system; possibility distribution; most possible residual lifetime

由于信息的不完全和不精确性, 因此在实际工程系统中存在着大量的不确定性, 学者们按照数学方法对不确定性进行了量化, 并将这些不确定性分

为两类: 一类是随机不确定性, 或称固有不确定性, 这类不确定性是环境和系统自身所固有的, 也是不可减少的; 另一类是认知不确定性, 或称主观不确定

收稿日期: 2012-07-09。 作者简介: 庞煜 (1986—), 女, 博士生; 黄洪钟 (通信作者), 男, 教授, 博士生导师。 基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (51075061); 高等学校博士学科点专项科研基金资助项目 (20090185110019); 中央高校基本科研业务费资助项目 (CDJZR10285501)。

网络出版时间: 2012-12-18

网络出版地址: <http://www.cnki.net/kcms/detail/61.1069.T.20121218.0923.005.html>

性,这类不确定性是由于信息的缺乏和认识的不完全造成的。对于认知不确定性,近年来受到了学术界和工业界的密切关注<sup>[1-3]</sup>,这一类不确定性广泛存在于实际工程问题中,如对触发事件、故障树、事件树等的认识缺乏<sup>[4]</sup>。在可靠性分析中,学者们利用证据理论<sup>[5]</sup>、凸集模型<sup>[6]</sup>、区间分析<sup>[7-8]</sup>和可能性理论<sup>[9-10]</sup>等各种理论方法对认知不确定性进行了描述和表征,其中基于 Zadeh 的可能性理论<sup>[11]</sup>,对可靠性工程中的不确定性进行分析<sup>[12-17]</sup>的学者越来越多。可能性理论是建立在 2 个对偶的模糊测度(可能性测度和必要性测度)之上的,它与概率论很相似,两者都是基于集函数来表征不确定性的工具,不同点在于概率论具有可加性,而可能性理论只有次加性<sup>[18-19]</sup>。事实上,可能可靠性理论发展至今形成了 2 个分支:①由蔡开元提出的系统能双可靠性理论<sup>[20]</sup>;②由 Cappelle、Kerre 建立的将多状态结构函数与可能性理论相结合的方法<sup>[9,21]</sup>。前者的双可靠性模型是建立在 2 个基本假设之上的:①可能性假设,即系统的失效可以用可能性测度完全描述;②二值状态假设,即对系统的失效状态能够准确的定义,任何时候系统只有完好状态或失效状态。

Cappelle、Kerre 的方法在理论上是通过有效地利用系统结构函数,以及状态水平来建立系统可能可靠性函数的,然而,在实际应用时,由于系统状态的离散性导致系统状态可能性计算的不便,人们往往不知如何去建立系统可能可靠性函数,因此本文提出了利用 Cappelle、Kerre 的可能可靠性理论来研究多状态系统可靠性分析的方法。本文的核心内容就是找到计算系统可能可靠性函数的方法,并且从状态水平的观点出发,克服系统可能性分析的约束。

与系统状态可能性分布相比,人们可以通过更多的方法来得到系统寿命可能性分布<sup>[22]</sup>,如果已知系统状态和系统寿命的关系,就可以算出系统的可能可靠性。基于此,在可能可靠性函数中加入另外一个变量——观测时刻  $t_{im}$ ,可有效地将系统状态和系统寿命的可能性分布连接起来,绕过计算给定的系统状态可能性来计算,较容易地得到系统寿命的可能性分布。因此,通过系统状态和其相应的最大可能剩余寿命的函数关系,就可以巧妙地解决可能可靠性理论的局限问题。

## 1 可能可靠性的基本理论

单位区间  $[0,1]$  上的结构函数、序关系、水平状

态  $\alpha$  下的截集及可能可靠性函数的定义如下。

**定义 1**<sup>[23]</sup> 假设  $n$  是  $\geq 1$  的任意自然数,从定义域  $[0,1]^n$  映射到值域  $[0,1]$  上,函数  $\phi$  满足下列 2 个条件:①  $\phi(0, \dots, 0) = 0, \phi(1, \dots, 1) = 1$ ; ② 对任意  $(x, y) \in (L_1 \times \dots \times L_n)^2$ , 有  $x \leq y \Rightarrow \phi(x) \leq \phi(y)$ , 则称  $\phi$  为  $n$  维结构函数。

$\phi$  是定义域为  $[0,1]^n$ 、值域为  $[0,1]$  的映射,定义域表示  $n$  个子系统的乘积状态空间,值域表示系统状态空间。条件①表明,若  $n$  个子系统均处于失效状态,则系统也失效;若  $n$  个子系统均处于完整的工作状态,则系统也完整。条件②表明,  $\phi$  具有保序性,结构函数之间的序关系用符号  $\leq$  表示。假设  $\phi_1, \phi_2$  是  $[0,1]^n \rightarrow [0,1]$  上的 2 个结构函数,则

$$\phi_1 \leq \phi_2 \Leftrightarrow (\forall x \in [0,1]^n)(\phi_1(x) \leq \phi_2(x))$$

$\phi$  的  $\alpha$  截集  $S(\alpha, \phi)$  和对偶  $\alpha$  截集  $S^d(\alpha, \phi)$  分别为

$$S(\alpha, \phi) = \{x \mid x \in [0,1]^n; \phi(x) \geq \alpha\}$$

$$S^d(\alpha, \phi) = \{x \mid x \in [0,1]^n; \phi(x) \leq \alpha\}$$

式中:  $\alpha$  的取值为单位区间  $[0,1]$ 。

**定义 2**<sup>[23]</sup> 假设  $\phi$  为  $n$  维结构函数,  $\Pi$  为可能性测度,基于  $\phi$  的可能可靠性函数为

$$\rho(\Pi, \phi): [0,1] \rightarrow [0,1]; \alpha \mapsto \Pi(S(\alpha, \phi))$$

基于  $\phi$  的对偶可能可靠性函数为

$$\rho^d(\Pi, \phi): [0,1] \rightarrow [0,1]; \alpha \mapsto \Pi(S^d(\alpha, \phi))$$

选定水平状态  $\alpha$ , 当可能可靠性函数以  $\phi$  为结构函数时,系统性能较水平状态  $\alpha$  具有更高的可能性。同时,对偶可能可靠性函数的意义在于系统性能较选定水平状态  $\alpha$  具有更低的可能性。

## 2 系统模型假设

### 2.1 模型假设 1

当初始时刻  $t=0$  时,系统处于完好状态,系统的可能状态是有序的,其状态空间由  $[0,1]$  来描述。状态 1 表示系统完好,状态 0 表示系统完全失效。状态值从 1 下降到 0,即系统从完好状态 1 退化到完全失效的状态 0。

### 2.2 模型假设 2

设  $\tau_{sl}$  表示系统寿命,系统寿命要求越长,可能性则越低,即系统寿命的可能性分布随着寿命要求的增加呈下降趋势。随着系统的劣化,系统剩余寿命的可能性分布也在发生变化。每一个系统状态都对应于一个不同的剩余寿命的可能性分布,指定状态下的系统剩余寿命的可能性分布亦服从下降的趋势。同时,每一个系统状态都对应着一个保持完整

可能性的最长系统剩余寿命。事实上,由于状态 1 表征着系统的完好状态,其对应的剩余寿命即为系统寿命。任意水平状态  $\alpha$  对应的最大可能剩余寿命(MPRL)为水平状态  $\alpha$  对应的保有完全可能性的最长系统剩余寿命,用  $\tau_{mp}(\alpha)$  表示。取水平状态  $\alpha$  为完好状态 1,则根据  $t_1$  也可由  $\tau_{mp}(1)$  表示。

2.3 模型假设 3

给定状态下的 MPRL 与观测时刻无关,即给定状态下的最大可能剩余寿命只与系统所处状态有关,而与系统经历了多长时间到达这一状态无关。一旦给定了系统状态,所对应的最大可能剩余寿命也就唯一地被确定下来,同时可以验证系统寿命的可能性分布即是状态 1 对应的最大可能剩余寿命的可能性分布。

3 系统可能可靠性分析

文献[9,21]将多状态系统与可能性理论相结合,形成可能可靠性理论的一个分支。沿用这一思想,本节引入观测时刻变量,提出新的可能可靠性函数的定义。同时,结合系统状态与对应的最大可能剩余寿命之间的函数关系,利用系统寿命的可能性分析,来完成对可能可靠性函数的分析和计算。

3.1 可能可靠性函数的再定义

将系统可能可靠性定义为以  $\phi$  为结构函数<sup>[21]</sup>、系统状态性能比  $\alpha$  更高的可能性。其中,给定的  $\alpha$  被指定为检验系统是否可靠的标准——当系统表征出不劣于  $\alpha$  的状态时,则被认为是可靠的;当系统无法达到给定水平状态  $\alpha$  时,则被认为是不可靠的。在此基础上,系统可能可靠性即为系统被认为是可靠的可能性。在实际工程中,系统的状态集通常都是有限且离散的,很难得到系统状态的可能性分布,这便成为应用可能可靠性理论的瓶颈。如果建立起系统状态与系统剩余寿命之间的函数关系,再利用系统寿命的可能性分布,即可弥补这一瓶颈。

基于上述, $t_{im}$  也被引入到可能可靠性函数的定义中,系统是否可靠的标准成为系统在  $t_{im}$  表征出不劣于水平状态  $\alpha$ ,系统可能可靠性则定义为系统在  $t_{im}$  表征出不劣于  $\alpha$  的可能性,记为

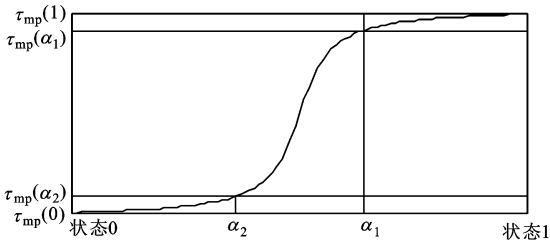
$$\rho_H^{\phi}(\alpha, t_{im}) = \Pi\{\phi(x) \geq \alpha, t_{im}\}$$

通过这一变量的引入,再建立系统状态与对应剩余寿命之间的函数关系,可实现对系统可能可靠性的计算分析。

3.2 系统状态与对应剩余寿命之间的关系

如图 1 所示,随着系统状态从完好状态 1 向完

全失效状态 0 劣化,状态所对应的剩余寿命也逐步缩短。



$\tau_{mp}(\alpha_1)$ 、 $\tau_{mp}(\alpha_2)$ :系统状态为  $\alpha_1$ 、 $\alpha_2$  下的最大可能剩余寿命

图 1 系统状态与对应的最大可能剩余寿命的关系

3.3 系统可能可靠性的计算分析

设  $\tau_{mp}(t_{im})$  表示给定观测时刻  $t_{im}$  的最大可能剩余寿命,系统可能可靠性的计算由下面的等式推出

$$\begin{aligned} \rho_H^{\phi}(\alpha, t_{im}) &= \Pi\{\phi(x) \geq \alpha, t_{im}\} = \\ &\Pi\{\tau_{mp}(t_{im}) \geq \tau_{mp}(\alpha)\} = \\ &\Pi\{\tau_{sl} \geq t_{im} + \tau_{mp}(\alpha)\} = \\ &\Pi\{\tau_{sl} = t_{im} + \tau_{mp}(\alpha)\} \end{aligned}$$

式中的推导是由系统状态与对应的 MPRL 之间的函数关系、系统寿命可能性递减的性质和可能性测度的性质  $\Pi(\bigcup_{i \in I} A_i) = \sup_{i \in I} \Pi(A_i)$  得到的。基于  $\alpha$  和对应的  $\tau_{mp}(\alpha)$  之间的函数关系,在给定  $t_{im}$  和  $\alpha$  时,系统可能可靠性的计算便可实现。综上所述,给定系统的  $t_{im}$  和  $\alpha$ ,按照下述 3 个步骤,便可计算系统的可能可靠性。

**步骤 1** 利用系统状态与 MPRL 之间的函数关系,得到  $\alpha$  下的  $\tau_{mp}(\alpha)$ 。

**步骤 2**  $t_{im}$  与  $\tau_{mp}(\alpha)$  的和表征为给定条件下期望的系统寿命。

**步骤 3** 利用系统寿命的可能性分布  $\pi(x)$ ,得到  $\tau_{mp}(\alpha)$  与  $t_{im}$  所对应的可能性即为系统可能可靠性。

4 数值算例

在具体给出的算例中,部分数据取自对 CF6-80C2A5 发动机机队的实证分析<sup>[24]</sup>。状态 1 表征发动机完好工作的状态,状态 0 表征发动机被拆换的状态,系统寿命即是发动机的在翼时间。发动机的拆换有多种原因,可能是发动机性能衰退、LLP(life limited part)剩余时间的限制,也可能收到适航指令(AD)或服务通告(SB)。表 1 中给出了发动机在翼时间的可能性分布。图 2 为发动机的离散分布图。

表 1 发动机在翼时间的可能性分布

|                  |                    |                     |                   |
|------------------|--------------------|---------------------|-------------------|
| $\tau_{sl}/h$    | $[0,8\ 000]$       | $(8\ 000,8\ 500]$   | $(8\ 500,9\ 000]$ |
| $\Pi(\tau_{sl})$ | 1.0                | 0.9                 | 0.7               |
| $\tau_{sl}/h$    | $(9\ 000,10\ 000]$ | $(11\ 000,10\ 000]$ |                   |
| $\Pi(\tau_{sl})$ | 0.5                | 0.3                 |                   |

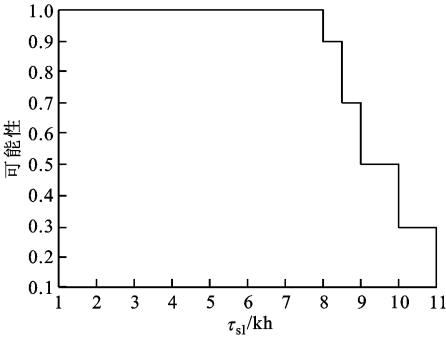


图 2 发动机在翼时间的可能性分析

由表 1 可得,发动机在拆换前保有完全可能性的最大工作时间为 8 000 h,这表明发动机的现有水平足以连续工作 8 000 h,但并不能说明发动机在拆换前一定可以连续工作 8 000 h 以上。同样地,对于可能度小于 1 时的系统寿命区间,发动机不具有完全达到某一工作时间的能力。

采用 3.3 节中归纳的步骤,建立系统状态与其对应的最大可能剩余寿命的关系。状态 1 的剩余寿命分布为发动机在翼时间的可能性分布,系统的每一个状态都有一个对应的剩余寿命分布。根据 9 个发动机参数:截尾指示量、排气温度偏差、燃油消耗量偏差、高压转子转速偏差、滑油压力偏差、低压转子振动值偏差、高压转子振动值偏差、起飞排气温度裕度、起飞外界温度限制对状态进行分类。系统状态与 MPRL 之间的关系如表 2 所示,由表 2 中所列出的 5 个离散状态点,以简单的线性关系来描述发动机状态与对应的 MPRL 的关系,结果如图 3 所示。

表 2 系统状态与 MPRL 的关系

|                       |       |       |       |       |     |
|-----------------------|-------|-------|-------|-------|-----|
| $\alpha$              | 1.0   | 0.8   | 0.6   | 0.4   | 0.0 |
| $\tau_{mp}(\alpha)/h$ | 8 000 | 5 600 | 4 000 | 2 300 | 0   |

发动机的状态由单位区间 $[0,1]$ 描述,状态 1 表征发动机的所有参数都处于很好的状态,且发动机处于完好的工作状态。当大部分参数下降到较好的水平,或者一些参数仍然处于很好的状态,而另一些参数所对应的情况已经开始劣化时,将系统状态以单位区间中的数值 0.8 进行量化,对系统的性能水

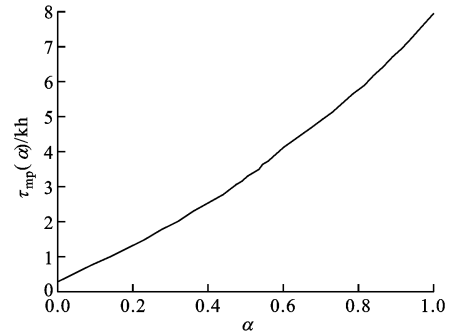


图 3 发动机状态与对应的 MPRL 的关系

平进行客观的表达。当大部分参数指标都劣化到一定程度时,将系统状态划分为以数值 0.6 进行量化的系统性能水平。当系统状态以数值 0.4 表达时,发动机系统的所有参数指标几乎都下降到一个相当的程度,状态 0 此时即对应着发动机应该拆换的状态。因此,发动机在翼的可能可靠性函数应从多个方面进一步分析。

(1)在给定的可靠水平下,发动机在翼 5 000 h 后的性能水平达到以数值 0.6 量化的状态,即  $\tau_{mp}(1)=8\ 000\ h, t_{im}=5\ 000\ h, \alpha=0.6$  时,系统的可能可靠性

$$\begin{aligned}\rho_{\Pi}(0.6,5\ 000\ h) &= \Pi\{\phi(x) \geq 0.6, t_{im} = 5\ 000\ h\} = \\ &= \Pi\{\tau_{mp}(5\ 000\ h) \geq \tau_{mp}(0.6)\} = \\ &= \Pi\{\tau_{sl} \geq 5\ 000\ h + 4\ 000\ h\} = 0.7\end{aligned}$$

说明发动机以 70%的可能度达到指定的可靠水平。

(2)在给定的系统可靠水平下,发动机在翼 2 000 h 后,系统性能达到以数值 0.8 量化的状态,即  $\tau_{mp}(1)=8\ 000\ h, t_{im}=2\ 000\ h, \alpha=0.8$  时,有

$$\begin{aligned}\rho_{\Pi}(0.8,2\ 000\ h) &= \Pi\{T = 2\ 000\ h + \tau_{mp}(0.8)\} = \\ &= \Pi\{T = 7\ 600\ h\} = 1\end{aligned}$$

这个结果表明,系统保持完整的可能性,并达到给定的可靠水平,也体现了发动机的性能。

由数值算例说明,所提出的系统可能可靠性理论分析,以及给定的可靠性水平,都是在某一指定观测时刻下保持的某一特定水平状态,根据系统的寿命可能性分布函数,以及系统状态和对应剩余寿命之间的函数关系,通过计算分析可以得到系统的可能可靠性。

5 结 论

本文针对文献[9]提出的将多状态系统与可能性理论相结合的可能可靠性理论,在系统可能可靠性函数的定义中引入新的变量,建立了系统状态对应的最大可能剩余寿命的数学模型。在此基础上,

结合系统状态与对应的最大可能剩余寿命之间的函数关系,将系统状态的可能性分析转化为在一定条件下对系统寿命可能性的分析,从而实现了离散系统状态下的可能可靠性分析,这为可能可靠性理论应用到实际工程中奠定了基础。

### 参考文献:

- [1] HELTON J C, OBERKAMPF W L. Alternative representations of epistemic uncertainty [J]. *Reliability Engineering and System Safety*, 2004, 85 (1/2/3): 1-10.
- [2] YOUN B D, CHOI K K, DU L, et al. Integration of possibility-based optimization and robust design for epistemic uncertainty [J]. *Transactions of the ASME: Journal of Mechanical Design*, 2007, 129 (8): 876-882.
- [3] SIMON C, WEBER P. Evidential networks for reliability analysis and performance evaluation of systems with imprecise knowledge [J]. *IEEE Transactions on Reliability*, 2009, 58(1): 69-87.
- [4] OBERKAMPF W L, HELTON J C, JOSLYN C A, et al. Challenge problems: uncertainty in system response given uncertain parameters [J]. *Reliability Engineering and System Safety*, 2004, 85(1/2/3): 11-19.
- [5] SIMON C, WEBER P, EVSUKOFF A. Bayesian networks inference algorithm to implement Dempster Shafer theory in reliability analysis [J]. *Reliability Engineering and System Safety*, 2008, 93(7): 950-963.
- [6] LUO Yangjun, KANG Zhan, LI A. Structural reliability assessment based on probability and convex set mixed model [J]. *Computers and Structures*, 2009, 87 (21/22): 1408-1415.
- [7] DU Xiaoping. Interval reliability analysis [C]// ASME 2007 International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference (IDETC/CIE 2007). Las Vegas, Nevada, USA: Design Engineering Division and Computers and Information in Engineering Division, 2008: 1103-1109.
- [8] QIU Zhiping, YANG Di, ELISHAKOFF I. Combination of structural reliability and interval analysis [J]. *Acta Mechanica Sinica*, 2008, 24(1): 61-67.
- [9] CAPPELLE B. Multistate structure functions and possibility theory: an alternative approach to reliability [M]. Gent, Belgium: Communication and Cognition, 1991: 252-293.
- [10] BENETTO E, DUJET C, ROUSSEAUX P. Possibility theory: a new approach to uncertainty analysis [J]. *International Journal of Life Cycle Assessment*, 2006, 11(2): 114-116.
- [11] ZADEH L A. Fuzzy sets as a basis for a theory of possibility [J]. *Fuzzy Sets and Systems*, 1978, 1 (1): 3-28.
- [12] HE Liping, QU Fuzheng. Possibilistic entropy-based measure of importance in fault tree analysis [J]. *Journal of Systems Engineering and Electronics*, 2009, 20 (2): 434-444.
- [13] ZHOU Jun, MOURELATOS Z P. A sequential algorithm for possibility-based design optimization [J]. *Transactions of the ASME: Journal of Mechanical Design*, 2008, 130(1): 1-10.
- [14] PODOFILLINI L, ZIO E, MERCURIO D, et al. Dynamic safety assessment: scenario identification via a possibilistic clustering approach [J]. *Reliability Engineering and System Safety*, 2010, 95(5): 534-549.
- [15] MARANO G C, QUARANTA G. A new possibilistic reliability index definition [J]. *Acta Mechanica*, 2010, 210(3/4): 291-303.
- [16] HUNTER A, LIU Weiru. A context-dependent algorithm for merging uncertain information in possibility theory [J]. *IEEE Transactions on Systems Man and Cybernetics: Part A Systems and Humans*, 2008, 38 (6): 1385-1397.
- [17] PANG Yu, HUANG Hongzhong, XIAO Ningcong, et al. Possibilistic reliability analysis of repairable system with omitted or delayed failure effects [J]. *Maintenance and Reliability*, 2012, 14 (3): 195-202.
- [18] HUANG Hongzhong, HE Liping. New approaches to systems analysis and design: a review [M]. London, England: Springer-Verlag, 2008: 477-498.
- [19] DU L, CHOI K K, YOUN, B D, et al. Possibility-based design optimization method for design problems with both statistical and fuzzy input data [J]. *Transactions of the ASME: Journal of Mechanical Design*, 2006, 128(4): 928-935.
- [20] CAI Kaiyuan, WEN Chuanyuan, ZHANG Minglian. Posbist reliability behavior of fault-tolerant systems [J]. *Microelectronics and Reliability*, 1995, 35 (1): 49-56.
- [21] CAPPELLE B, KERRE E E. Computer assisted reliability analysis: an application of possibilistic reliability theory to a subsystem of a nuclear power plant [J]. *Fuzzy Sets and Systems*, 1995, 74(1): 103-113.

(下转第 113 页)