

含双时滞主动控制系统平凡平衡解 稳定性的数值分析

孙清¹, 张斌², 伍晓红³, 薛晓敏³

(1. 西安交通大学土木工程系, 710049, 西安; 2. 河南省电力勘测设计院, 450007, 郑州;
3. 西安交通大学航天航空学院, 710049, 西安)

摘要: 采用精细积分方法求解含双时滞受控系统的平凡平衡解, 根据不同时滞量下系统响应的敛散性判断系统的稳定性, 得到了时滞受控系统随时滞变化的稳定区域分布, 避免了求解时滞系统特征方程的困难. 在此基础上, 分析了不同时滞量和反馈增益对系统稳定区域的影响规律, 结果表明: 随时滞量的变化, 系统的稳定区域与不稳定区域是交替分布的, 当 2 个反馈增益相差较大时, 与较大的反馈增益相关的时滞量对系统的稳定性影响更为显著.

关键词: 精细积分; 时滞; 稳定性; 主动控制; 定常系统

中图分类号: O313.7 **文献标志码:** A **文章编号:** 0253-987X(2010)05-0102-04

Numerical Analysis for Stability of Trivial Equilibrium Solution of Active Control Systems with Double Time Delays

SUN Qing¹, ZHANG Bin², WU Xiaohong³, XUE Xiaomin³

(1. Department of Civil Engineering, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China; 2. Henan Electric Power Survey and Design Institute, Zhengzhou 450007, China; 3. School of Aerospace, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China)

Abstract: The characteristic equation of control systems with time-delay is a transcendental equation containing exponential function, which has infinite roots difficult to be all solved. Aiming at solving dynamic equation of control system with double time delays, a precise integration method is chosen to obtain the distribution of stable regions of system with variational time delays and avoid the difficulty for solving the characteristic equation as taking different feedback control gains. The influence of different time delays and feedback control gains on distribution of stable regions of system is discussed. It shows the cross distribution of stable and unstable areas, and the time delay related with the feedback gains with higher absolute value, exert a significant effect on stability of system, especially for the case of two quite different feedback gains.

Keywords: precise integration method; time delay; stability; active control; time-invariant system

振动主动控制技术是工程结构、航天航空、车辆、机器人等工程领域需要解决的关键问题, 主要研究如何减小受控对象的有害振动, 以满足人们的预定要求. 由于从信号采集处理、控制律运算到控制力的施加都需要一定的时间, 因此在控制回路中会出现时间滞后现象^[1]. 时滞使得被控量不能及时反映系统所承受的扰动, 也不能及时准确施加控制力, 从

而会产生超调, 使系统的稳定性变差, 给系统的控制增加了很大的困难^[2-3].

受控系统的稳定性分析主要有 2 种方法: 第一种方法基于 Lyapunov 函数分析系统的稳定性^[4-6], 但对于实际系统, 通常很难构造出合适的 Lyapunov 函数, 且得到的结果往往偏于保守; 第二种方法是特征值法, 但由于时滞的存在, 含时滞受控系统的特征

方程是含指数函数的超越方程,该超越方程的根有无穷多个,很难全部求解,这就给系统稳定性研究造成了困难.在讨论超越方程的特征根时,要用到许多复变函数技巧. Su 等^[7]、Chen 等^[8]发展了多种数值方法来直接判定特征值是否有负实部或确定其有负实部的条件,但计算工作量很大. Wang 等^[9]采用特征值法对时滞受控系统的稳定性进行了大量研究,讨论了具有时滞反馈的单自由度受控振动系统的稳定性,采用广义 Sturm 理论研究了高维时滞系统的时滞无关稳定性及稳定性切换等.也有学者从控制理论出发,采用 Rouché 定理^[10]、Nyquist 判定准则^[11]来分析系统稳定性,但是这些方法用于研究系统参数对系统稳定性的影响时工作量很大.

本文采用精细积分方法求解含时滞受控系统的动力响应^[12],然后根据不同时滞量下系统响应的敛散性来判断系统的稳定性,得到了稳定区域的分布,避免了求解时滞系统特征方程的困难,在此基础上分析了时滞量、反馈控制增益等参数对系统稳定区域的影响规律.

1 含时滞受控系统的动力学方程及其数值求解

考虑含双时滞受控常系统,其动力学方程为

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{x}(t) = \mathbf{F}(t) + \mathbf{G}_p\mathbf{x}(t - \tau_1) + \mathbf{G}_d\dot{\mathbf{x}}(t - \tau_2) \quad (1)$$

式中: $\mathbf{M}$ 为质量矩阵; $\mathbf{C}$ 为阻尼矩阵; $\mathbf{K}$ 为刚度矩阵; $\mathbf{F}(t)$ 为外加激励矩阵; $\mathbf{G}_p\mathbf{x}(t - \tau_1)$ 是与位移相关的控制力矩阵; $\mathbf{G}_d\dot{\mathbf{x}}(t - \tau_2)$ 是与速度相关的控制力矩阵; τ_1 、 τ_2 分别是位移反馈和速度反馈的时滞量,当 $t < \tau_1$ 时, $\mathbf{x}(t - \tau_1) = 0$,当 $t < \tau_2$ 时, $\dot{\mathbf{x}}(t - \tau_2) = 0$.

采用精细积分方法求解方程(1).首先进行变量代换,式(1)可表达为

$$\dot{\mathbf{v}}(t) = \mathbf{H}\mathbf{v}(t) + \mathbf{P}(t) \quad (2)$$

令

$$\begin{aligned} \mathbf{q}(t) &= \mathbf{x}(t); \quad \mathbf{p}(t) = \mathbf{M}\dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{C}\mathbf{x}(t)/2; \\ \mathbf{v}(t) &= \{\mathbf{q}(t) \quad \mathbf{p}(t)\}^T; \\ \mathbf{H} &= \begin{bmatrix} -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C}/2 & \mathbf{M}^{-1} \\ \mathbf{C}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C}/(4-k) & -\mathbf{C}\mathbf{M}^{-1}/2 \end{bmatrix}; \\ \mathbf{P}(t) &= \{\mathbf{F}(t) + \mathbf{G}_p\mathbf{q}(t - \tau_1) + \mathbf{G}_d(\mathbf{M}^{-1}\mathbf{p}(t - \tau_2) - \mathbf{M}^{-1}\mathbf{C}\mathbf{q}(t - \tau_1)/2)\}^T \end{aligned}$$

如第 k 个时间步长的系统状态为 $\mathbf{v}(t_k)$,则第 $k+1$ 个步长的状态 $\mathbf{v}(t_{k+1})$ 可表述为

$$\mathbf{v}(t_{k+1}) = \mathbf{T}[\mathbf{v}(t_k) + \mathbf{H}^{-1}(\mathbf{P}_0 + \mathbf{H}^{-1}\mathbf{P}_1)] -$$

$$\mathbf{H}^{-1}[\mathbf{P}_0 + \mathbf{H}^{-1}\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_1h] \quad (3)$$

式中: h 为时间步长; $t_k = kh$; $\mathbf{T} = \exp(\mathbf{H}h)$; $\mathbf{P}_0 = \mathbf{P}(t_k)$; $\mathbf{P}_1 = [\mathbf{P}(t_{k+1}) - \mathbf{P}(t_k)]/h$.

在文献[12]的算例中,每个时间点的荷载向量 $\mathbf{P}(t_k)$ 都是已知的,在程序的初始可以提前赋值,但是对于本文求解的含有时滞的振动控制方程,由于控制力 $\mathbf{G}_p\mathbf{x}(t - \tau_1)$ 和 $\mathbf{G}_d\dot{\mathbf{x}}(t - \tau_2)$ 与该时间点 τ_1 之前的位移以及 τ_2 之前的速度有关,必须随着计算的进行不断重新赋值,因此,荷载向量 $\mathbf{P}(t_k)$ 的求解成为解决问题的关键.本文求解荷载向量 $\mathbf{P}(t_k)$ 的方法如下.

选取合适的时间步长 h ,令 h 与时滞量 τ_1 和 τ_2 满足下述关系

$$h = \tau_1/l; \quad h = \tau_2/p \quad (4)$$

式中: l 与 p 均为正整数.设 $l < p$,对第 k 个时间步长的荷载向量进行计算,当 $k < l-1$ 时,有

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(t_k) &= \{\mathbf{0} \quad \mathbf{f}(t_k)\}^T \\ \mathbf{P}(t_{k+1}) &= \{\mathbf{0} \quad \mathbf{f}(t_{k+1})\}^T \end{aligned} \quad (5)$$

对 $k = l-1$,设 $\{\mathbf{q}(t_k) \quad \mathbf{p}(t_k)\}^T = \{\mathbf{q}_k \quad \mathbf{p}_k\}^T$,则有

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(t_k) &= \{\mathbf{0} \quad \mathbf{f}(t_k)\}^T \\ \mathbf{P}(t_{k+1}) &= \{\mathbf{0} \quad \mathbf{f}(t_{k+1}) + \mathbf{G}_p\mathbf{q}_0\}^T \end{aligned} \quad (6)$$

对 $l \leq k < p-1$,有

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(t_k) &= \{\mathbf{0} \quad \mathbf{f}(t_k) + \mathbf{G}_p\mathbf{q}_{k-l}\}^T \\ \mathbf{P}(t_{k+1}) &= \{\mathbf{0} \quad \mathbf{f}(t_{k+1}) + \mathbf{G}_p\mathbf{q}_{k-l+1}\}^T \end{aligned} \quad (7)$$

对 $k = p-1$,有

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(t_k) &= \{\mathbf{0} \quad \mathbf{f}(t_k) + \mathbf{G}_p\mathbf{q}_{k-l}\}^T \\ \mathbf{P}(t_{k+1}) &= \{\mathbf{0} \quad \mathbf{f}(t_{k+1}) + \mathbf{G}_p\mathbf{q}_{k-l+1} + \mathbf{G}_d(\mathbf{M}^{-1}\mathbf{p}_0 - \mathbf{M}^{-1}\mathbf{C}\mathbf{q}_0/2)\}^T \end{aligned} \quad (8)$$

对 $k \geq p$,有

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(t_k) &= \{\mathbf{0} \quad \mathbf{f}(t_k) + \mathbf{G}_p\mathbf{q}_{k-l} + \mathbf{G}_d(\mathbf{M}^{-1}\mathbf{p}_{k-p} - \mathbf{M}^{-1}\mathbf{C}\mathbf{q}_{k-p}/2)\}^T \\ \mathbf{P}(t_{k+1}) &= \{\mathbf{0} \quad \mathbf{f}(t_{k+1}) + \mathbf{G}_p\mathbf{q}_{k-l+1} + \mathbf{G}_d(\mathbf{M}^{-1}\mathbf{p}_{k-p+1} - \mathbf{M}^{-1}\mathbf{C}\mathbf{q}_{k-p+1}/2)\}^T \end{aligned} \quad (9)$$

其中 $\mathbf{q}_{k-l}$ 、 $\mathbf{p}_{k-p}$ 、 $\mathbf{q}_{k-p}$ 等向量在第 k 步计算时均为已知,此时可以逐步对 $\mathbf{P}(t_k)$ 赋值,从而求出每一步的响应.对于 $l \geq p$ 的情况,荷载向量求解过程类似.

2 含时滞受控系统的稳定性分析

采用上述方法求解含时滞受控系统的响应,对式(1)所述系统,选取参数为: $m = 1 \text{ kg}$, $c = 0.04 \text{ N} \cdot \text{s/m}$, $K = 1 \text{ N/m}$, $f(t) = \sin(6t)$, $g_p = -0.4 \text{ N/m}$, $g_d = -0.128 \text{ N} \cdot \text{s/m}$.初始条件为 $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 0$.这样式(1)可表达为

$$\ddot{x}(t) + 0.04\dot{x}(t) + x(t) = \sin(6t) - 0.4x(t - \tau_1) - 0.1281\dot{x}(t - \tau_2) \quad (10)$$

取时间步长为 0.01 s. 当系统没有控制时, 时程响应曲线如图 1 所示, 可以看出系统响应是趋于收敛的, 但是收敛速度比较慢; 当 $\tau_1 = 5$ s、 $\tau_2 = 9.8$ s 时, 求得的系统响应曲线如图 2 所示, 可以看出, 当时滞量与控制增益匹配良好时, 系统响应的收敛速度明显加快.

改变时滞量, 当 $\tau_1 = 4$ s、 $\tau_2 = 8$ s 以及 $\tau_1 = 4$ s、 $\tau_2 = 6$ s 时, 求得的系统响应曲线如图 3、图 4 所示.

从图 3 和图 4 可以看出, 在控制增益相同的情况下, 当时滞量取值不同时, 系统的控制效果差别很大. 图 2 和图 3 的系统响应是稳定的, 但是收敛的速度差别很大, 图 3 中的响应与系统无控制状态时(见图 1)很接近. 图 4 所示的系统响应随时间变化是发

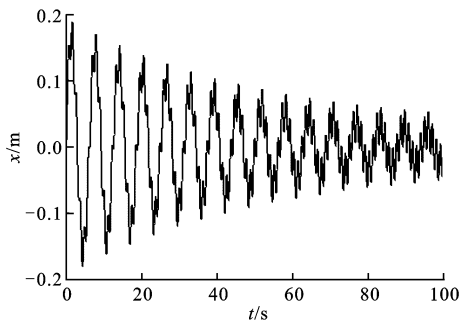


图 1 无控制时系统的位移时程响应

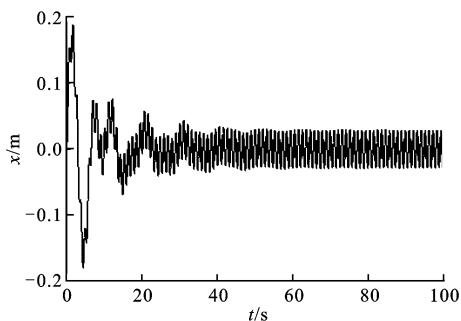


图 2 $\tau_1 = 5$ s、 $\tau_2 = 9.8$ s 时系统的位移时程响应

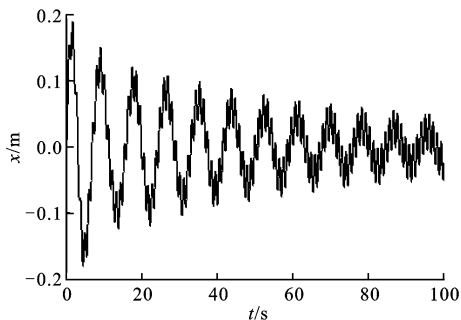


图 3 $\tau_1 = 4$ s、 $\tau_2 = 8$ s 时系统的位移时程响应

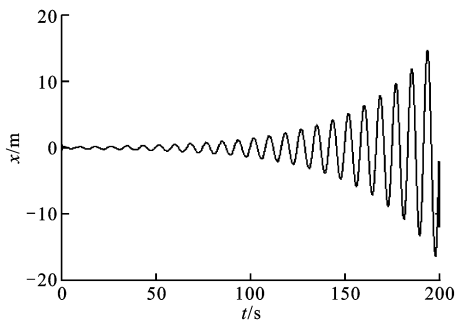


图 4 $\tau_1 = 4$ s、 $\tau_2 = 6$ s 时系统的位移时程响应

散的, 说明在控制增益相同的情况下, 较小的时滞量并不能保证系统稳定, 较大的时滞量也不总是使系统失稳, 这与传统观念不同.

取不同的时滞量逐点计算, 得到不同时滞量下系统的时程响应. 将响应曲线敛散性发生变化时所对应的时滞量作为临界点, 把这些临界点连接起来可得到系统稳定区域的边界, 如图 5 所示(图中的 S 和 U 分别表示稳定区域和不稳定区域). 图 5 给出的稳定区域与文献[13]中采用特征值方法得到的稳定区域相同, 说明采用精细积分方法分析时滞受控系统的稳定性是可行的.

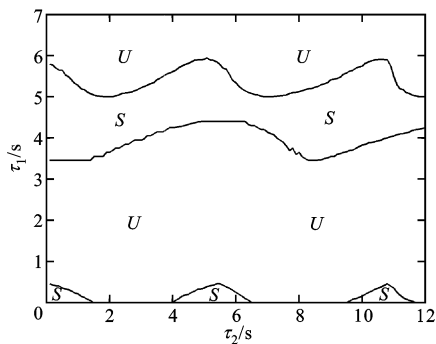


图 5 $g_p = -0.4$ N/m、 $g_d = -0.1281$ N·s/m 时系统的稳定区域分布

下面分析不同反馈增益对系统稳定性的影响. 当 $g_p = -0.4$ N/m、 $g_d = -0.246$ N·s/m 时, 系统的稳定区域如图 6 所示, 可见稳定区域大致呈横向分布, τ_1 比 τ_2 对系统的稳定性影响更大; 当 $g_p = -0.4$ N/m、 $g_d = -0.4$ N·s/m 时, 系统的稳定区域如图 7 所示, 可见稳定区域大致呈 45° 斜向分布, 此时 τ_1 和 τ_2 对系统稳定性的影响较为接近; 当 $g_p = -0.1281$ N/m、 $g_d = -0.4$ N·s/m 时, 系统的稳定区域如图 8 所示, 可见稳定区域大致呈纵向分布, 此时 τ_2 对系统的稳定性影响较大; 当 $g_p = -0.0628$ N/m、 $g_d = -0.4$ N·s/m 时, 系统的稳定区域如图 9 所示, 此时稳定区域依然呈纵向分布,

而且分界线比图 8 更趋于平滑,说明 τ_2 对系统稳定性的影响更为显著. 比较图 5~图 9 可以看出,在不同的反馈增益下,虽然稳定区域的分布不同,但稳定区域与不稳定区域都是交替出现的,因此在设计控制算法时,通过选取相互匹配的时滞量与增益,可以得到满意的控制效果.

从图 5~图 9 还可以看出,当与位移有关的反馈增益 g_p 的绝对值较大时,对系统稳定性起决定作用的是与位移有关的时滞量 τ_1 (见图 5),当 τ_1 取 4.5 s 时,无论 τ_2 如何变化,系统的响应都是稳定的,而当 τ_1 取 2s 时,无论 τ_2 如何变化,系统的响应

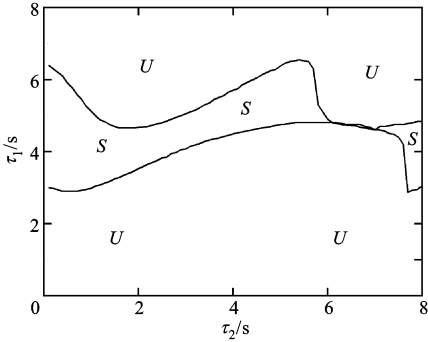


图 6 $g_p = -0.4 \text{ N/m}$ 、 $g_d = -0.246 \text{ N} \cdot \text{s/m}$ 时系统的稳定区域分布

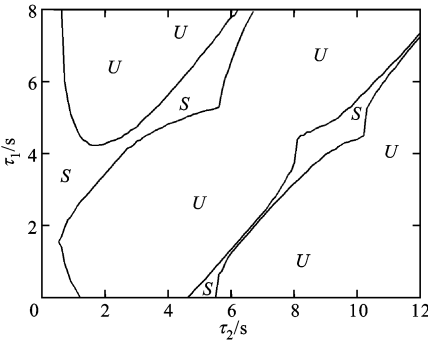


图 7 $g_p = -0.4 \text{ N/m}$ 、 $g_d = -0.4 \text{ N} \cdot \text{s/m}$ 时系统的稳定区域分布

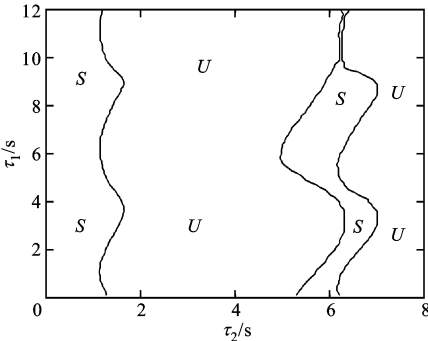


图 8 $g_p = -0.1281 \text{ N/m}$ 、 $g_d = -0.4 \text{ N} \cdot \text{s/m}$ 时系统的稳定区域分布

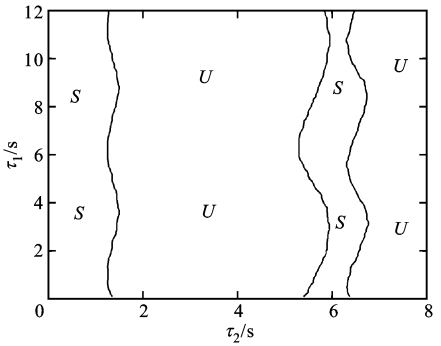


图 9 $g_p = -0.0628 \text{ N/m}$ 、 $g_d = -0.4 \text{ N} \cdot \text{s/m}$ 时系统的稳定区域分布

都是不稳定的. 同样,当与速度有关的反馈增益 g_d 的绝对值较大时,对系统稳定性起决定作用的将是与速度有关的时滞量 τ_2 ,而当 2 个反馈增益相等时,稳定区域与 2 个时滞量都相关.

出现这种现象的原因可通过控制力表达式 $g_p x(t-\tau_1) + g_d \dot{x}(t-\tau_2)$ 来解释:当 g_p 的绝对值较大时, τ_1 的变化对控制力的大小影响很大,而如果 τ_2 发生同样的变化,由于 g_d 的绝对值较小,因此 τ_2 产生的影响也就很有限. 相反,如果 g_d 的绝对值较大,也可以得到类似的结论.

3 结 论

本文采用精细积分方法求解含时滞受控系统的动力学方程,根据不同时滞量下系统响应的敛散性判断系统的稳定性,得到了时滞受控系统随时滞变化的稳定区域分布,避免了求解时滞系统特征方程的困难. 分析了不同增益反馈组合下 2 个时滞量在稳定区域和不稳定区域的相互匹配关系,结果表明:系统的稳定区域与不稳定区域是交叉分布的,而且当 2 个反馈增益相差较大时,与绝对值较大的反馈增益相关的时滞量对系统的稳定性影响更为显著. 在设计振动主动控制算法的过程中,利用本文的方法对系统稳定性进行分析,在稳定区域图中选择合适的时滞量与增益进行匹配,可望得到满意的控制效果.

参考文献:

[1] 徐鉴,裴利军. 时滞系统动力学近期研究进展与展望[J]. 力学进展, 2006, 36(1): 17-30.
XU Jian, PEI Lijun. Advances in dynamics for delayed system [J]. Advances in Mechanics, 2006, 36(1): 17-30.
[2] 胡海岩,王在华. 非线性时滞动力系统的研究进展[J].

- 力学进展, 1999, 29(4): 501-512.
- HU Haiyan, WANG Zaihua. Review on nonlinear dynamic systems involving time delays [J]. *Advances in Mechanics*, 1999, 29(4): 501-512.
- [3] 胡海岩. 振动主动控制中的时滞动力学问题[J]. *振动工程学报*, 1997, 10(3): 273-279.
- HU Haiyan. On dynamics in vibration control with time delay [J]. *Journal of Vibration Engineering*, 1997, 10(3): 273-279.
- [4] HE Yong, WU Min, SHE Jinhua, et al. Parameter-dependent Lyapunov functional for stability of time-delay systems with polytopic-type uncertainties [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2004, 49(5): 828-832.
- [5] HARITONOV V L, ZHABKO A P. Lyapunov-Krasovskii approach to the robust stability analysis of time-delay systems [J]. *Automatic*, 2003, 39(1): 15-20.
- [6] WU Huaining. Delay-dependent stability analysis and stabilization for discrete-time fuzzy systems with state delay: a fuzzy Lyapunov-Krasovskii functional approach [J]. *IEEE Transactions on System, Man and Cybernetics: B, Cybernetics*, 2006, 36(4): 954-962.
- [7] SU Juing-Huei, FONG I Kong, TSENG Chwan-Lu. Stability analysis of linear systems with time delay [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1994, 39(6): 1341-1344.
- [8] CHEN Jie. On computing the maximal delay intervals for stability of linear delay systems [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1995, 40(6): 1087-1093.
- [9] WANG Zaihua, HU Haiyan. Stabilization of vibration systems via delayed state difference feedback [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2006, 296(1/2): 117-129.
- [10] WEI Junjie, RUAN Shigui. Stability and bifurcation in a neural network model with two delays [J]. *Physica: D*, 1999, 130: 255-272.
- [11] LIAO Xiaofeng, CHENG Guanrong. Local stability, Hopf and resonant codimension-two bifurcation in a harmonic oscillator with two delays [J]. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2001, 11(8): 2105-2121.
- [12] 钟万勰. 结构动力方程的精细时程积分法[J]. *大连理工大学学报*, 1994, 34(2): 131-135.
- ZHONG Wanxie. On precise time-integration method for structural dynamics [J]. *Journal of Dalian University of Technology*, 1994, 34(2): 131-135.
- [13] ALI M S, HOU Z K, NOORI M N. Stability and performance of feedback control systems with time delays [J]. *Computers and Structures*, 1998, 66(2/3): 241-248.

(编辑 葛赵青)